T-093

کلیات علوم و فنون ریاضیه‌دن

نومرو : ۹



دردنجی جزؤ

هندسهٔ مجسمه

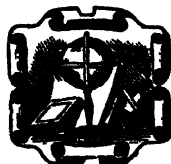
مکاتب اعدادیهٔ شاهانه ایکنجی سنه‌لرینه مخصوص اولمق اوزره ترتیب ایدلمشدر



مکتب حربیهٔ شاهانه درس ناظری ارکان حربیه میرالایی بکلردن

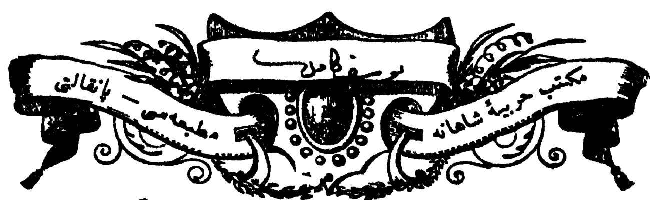
محمد اسعد

مجلس معارف عسکری طرفندن بالتدقیق کلیاته قبول و ادخال اولنمشدر.

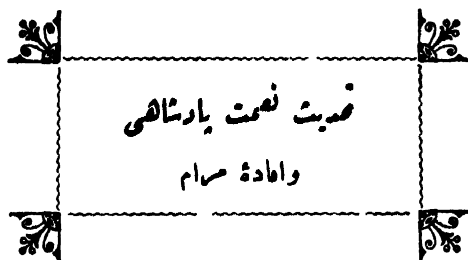


طبع اول

استانبول — ۱۳۱۶ شباط


یوسف کامل
مکتب حربیهٔ شاهانه مطبعه‌سی — پانقالتی

بسم الله الرحمن الرحيم



مكون كائنات تعالى شانه حضرتلرى ولى نعمت بيمنتمز ولى
نعمت جهان، شهنشاه معظم وخليفهٔ رسول الله فى العالم، پادشاهمز
باش قوماندان اقدسمز، السلطان ابن السلطان السلطان ﴿ الغازى
عبد الحميد خان ثانى ﴾ افندمز حضرتلرينى الى اخر الدوران
كمال صحت وعافيتله اريكه پيراى شوكت و شان بيورسون آمين.

المانیا مکاتب اعدادیه‌سنده اوقوتدیریلان «ممه‌لهر» نام ذاتك تألیفکرده‌سی اولان «مباحث ریاضیه» نك هندسهٔ مسطحه قسمنی بوندن اقدم سایهٔ معارفوایهٔ حضرت خلافتپناهیده ترجمه ایلمش ومکاتب اعدادیهٔ شاهانه برنجی سنه‌لرنده تدریس ایدلمك اوزره نشرینه موفق اولمش ایدم. مباحث مذکوره‌نك هندسهٔ مجسمه قسمی، مسطحه قسمی مثللو مکاتیب اعدادیهٔ شاهانه شاکردانی ایچون لزوملی کوریلان و اساس پروغرامنه توافق ایدن دعاوی و مسائلی حاوی اوله‌رق ۷۲ درسده، قاعدهٔ تکرر اوزره، اوقوتدیریله‌بیله‌جك درجه‌ده بولنمش اولمغله بمنه الکریم انك دخی ترجمه‌سنه بالابتدار عصر کمالات حصر حضرت تاجداریده زیور دستگاه انتشار اولان آثار جدیده‌یه ضمیمهٔ عاجزانه‌م اولمق اوزره نشرینه اجتسار ایلدم.

والله ولی التوفیق



﴿ اخطار ﴾

هر فصلك وبابك نهايتنده يازيلان وظائف ومسائلدن ايجابى قدرى معلمين كرام طرفندن درسك نهايتنه طوغرى شاكردانه ويريله‌جكدر . متعدد شاكردانه عينى بر وظيفه ويا مسئله ويرلمش اولماماق ايچون وظائف ومسائلده بولنان اعداد و ارقام دكيشديريله‌رك هر شاكرد ايچون باشقه اولمليدر .

شاكردان ، مذاكره ويا بوش زمانلرنده ، كنديلرينه ويريلان مسائل و وظائفى تحريراً حاضرليوب مذكور وظائف و مسائله مخصوص اولان درس زمانلرنده خواجه‌لرينه تقديم ايده‌جكلردر . معلم افنديلر او درسلر اثناسنده كيف ما اتفق شاكرد قالديره‌رق اشبو شاكردانه ، تحريراً حل ايتدكلرى وظيفه‌لرى ويا مسئله‌لرى بر كره دها تخته باشنده ارقداشلرينك مواجهه‌سنده حل ايتديره‌جكلر و متباقيسنك مسائل و وظائفى تصحيحات مقتضيه اجراسندن صوكره صاحبلرينه اعاده ايليه‌جكلردر .

هر حالده تعريفاتى ، شكللر ترسيمى ومختلف مثاللر ايراديله شاكردانك ذهننه القايه وهر دعوى ومسئله‌نك ايلريده نيه يارايه‌جغنى وجهت تطبيقيسنى انلره كوزلجه تفهيمه همت ايده‌جكلردر .

شاكردانك مسئول اوله‌جغى مواد ، كتابك نهايتنده‌كى فهرست ايله ، بعضيسنك ايام مباركه‌يه تصادف ايتمسى احتمالنه قارشو احتياطاً ، التمش سكز درسه تقسيم اولنمشدر . هر درسه اصابت ايدن مقدارك تقريرى اكثريا بر درس مدتندن اول ختام بولمش اوله‌جقدر . بناء عليه بوندن بالاستفاده درس بر دها تقرير ايديله‌جكدر . اكر ينه وقت قالير سه تعليماته توفيقاً

تحته‌یه هر هانکی بر شاکرد جلب ایدیله‌زك اولکی درسلر استجواب اولنه‌
جقدر. مذکور التمش سکز درس تماماً کورلدکدن صوکره درس کسیمنه دها
وقت وار ایسه کچمش درسلر تکرار ایدیله‌جك ویا مسائل حل ایله اشتغال
اولنه‌جقدر .

ریاضیه‌نك تحصیلی بر چوق امثله و مسائلك حلیله ممکن اولدیغندن هر
معلم افندی وقت وفرصت بولدقجه شاکردانه، بوکتابده مندرج اولمیان
سائر وظائف و مسائلی دخی حل ایتدیرمکه غیرت ایلملیدر .



هندسهٔ مجسمه

برنجی فصل

مستویلرك و مستقیملرك بعد بردده اوضاع مختلفهسی

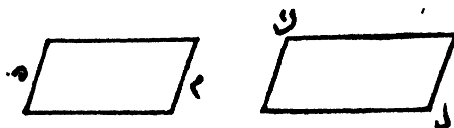
§ (۱)

معلومات ابتدائیه

(۱) — بر مستوینك ایکی نقطهسی بیننه وصل اولنان مستقیم {ه . § ۱ . (۲۲)} تماماً مستویٔ مذکوره منطبق بولنور. بو سببدندرکه:

(۲) : بر مستوی‌یه منطبق و موازی اولمیان بر مستقیم مستویٔ مذکوری‌یالکز برنقطه‌ده قطع ایلر. اشبو نقطه‌یه «موقع مستقیم» دینلور .

(۳) : هیچ بر نقطه‌سنده مستوی‌یی قطع ایلمیان مستقیم «مستوی‌یه موازی» اولور .





شکل ۱

(٤) : مستویلر ، مستقیملر مثللو غیر محدوددر. فقط صورت افاده‌یی اختصار و تسهیل ایچون مستویلر متوازی‌الاضلاعلر طرزنده ارائه و (شکل — ۱) «م ه و یا ه ویاخود ك ل مستویسی » دیه افاده اولنور .



شکل ۲

(٥) : بر مستوی، بر مستقیم اوزرنده بولنمیان اوچ نقطه و اسطه‌سیله تماماً معین

ه . هندسهٔ مسطحه‌یه اشارتدر.

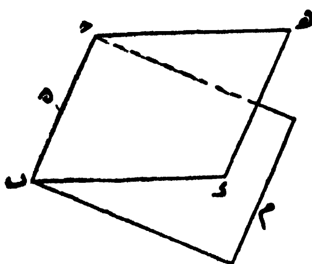
اولور. چونکه (شکل — ٢) مذکور اوچ نقطه‌نك ایکیسندن ومثلا (ب، ج) دن کچن ب ج مستقیمندن برمستوی امرار ومستقیم، محور اولمق اوزره مذکور مستوی تدویر ایدلسه دور اثناسنده اوچنجی د نقطه‌سنه تقرب ایدوب نهایت مذکور نقطه‌دن کچر و دوره دوام ایدلدیکی تقدیرده نقطهٔ مذکوره‌دن درعقب آیریلوب یالکز بروضعیتده د نقطه‌سنی حاوی بولنور. دیمککه اوچ نقطه‌دن یالکز بر مستوی کچر. اشبو اوچ نقطه معلوم اولورسه مستوی دخی معلوم ومعین اولمش اولور. بوکا استناداً هر قنغی بر مستوی :

اولاً — بر مستقیم ایله بونك خارجنده واقع بر نقطه،

ثانیاً — یکدیکرینی قطع ایدن ایکی مستقیم ؛

ثالثا — بر مثلث ؛

رابعاً — ایکی موازی مستقیم { ه. § ٨ } عینی برمستوی اوزرنده بولندیغندن مستقیمین متوازیین اعانه‌سیله دخی معین اولور .

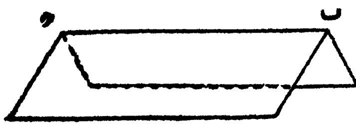


شکل ٣

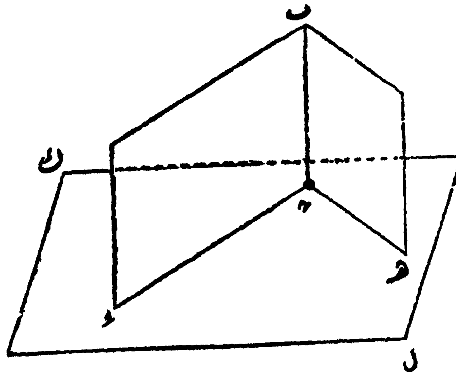
(٦) : (شکل — ٣) ایکی موازی ب ج، د ه مستقیمنك بریسندن و مثلا ب ج مستقیمندن کچن (م ە) مستویسی، مذکور مستقیمین متوازیینك (ب ه) مستویسنه منطبق اولمز ایسه، دیکر د ه مستقیمنه و بالعکس هر قنغی بر د ه مستقیمی (م ە) مستویسی داخلنده بولنان بر ب ج مستقیمنه موازی اولسه (م ە) مستویسنه دخی موازی اولور. چونکه موازی اولمسه موازی اولان مستقیملرك دخی یکدیکرینی قطع ایتمسی لازم کلیرکه خلاف حقیقتدر .

(٧) : الی غیرالنهایه استقامت مخرجه‌لرنده یکدیکرینی قطع ایتمیان مستویلر « موازی » اولور .

(٨): ایکی مستوی، موازی اولماز ایسه‌یکدیکرینی برمستقیم استقامتنده قطع ایدر، یعنی فصل مشترکلری (شکل — ٤)



شکل ٤

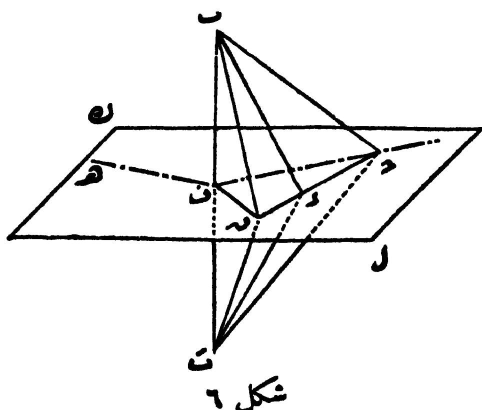


شکل ٥

برمستقیم اولور. فی‌الحقیقه فصل مشترکلرنده، برمستقیم اوزرنده اولمیان اوچ نقطه بولمق ممکن اولسه بو اوچ نقطه‌دن {٥} یالکز بر مستوی کچه‌جکندن متقاطع فرض ایدلمش اولان ایکی مستوینك یکدیکرینه منطبق اولمسی اقتضا ایدر.

(٩): یکدیکرینی قطع ایدن اوچ مستوینك فصل مشترکی بر نقطه اولور. (شکل — ٥) فی الواقع هر ایکی مستوینك فصل مشترکی {٨} برر مستقیم اولوب بو مستقیمك بهری اوچنجی مستوی‌یی {٢} یالکز بر نقطه‌ده قطع ایدر. بو حالده مذکور اوچ مستوی اوزرنده مشترك یالکز ح نقطه‌سی بولنور.

§ ٢)



شكل ٦

دعوى : (شكل — ٦)
ب، بَ مثللو ثابت ايكى نقطه‌دن ابعاد متساويه‌ده بولنان نقاطك محل هندسيسى بر مستويدر.

اثباتى: ه، ح محلك اوزرنده واقع ايكى نقطه اولسون . اشبو ايكى نقطه بينى وصل ومستقيم موصول اوزرنده كيف ما اتفق بر د نقطه‌سى اخذ ايده‌لم . بر موجب فرضيات بح = بَح، به = بَه اولوب حه = حه يعنى هر ايكى مثلثده مشترك اولد . يغندن {ﻫ . § ٢٦} △ بهح ≅ بَهح اولمغله : حهب = حهبَ و بناء عليه {ﻫ . § ٢٠} △ بده ≅ بَده بولنوب بو حالده بَد = بد اوله‌جغندن د نقطه‌سى وبو سببدن ه ح مستقيمى محل هندسىٔ مفروضك اوزرنده بولنور . ايشته محلك هر ايكى نقطه‌سى آره‌سنه موصول كافهٔ مستقيملر تماماً محل مذكور اوزرنده بوله‌جغى بو وجهله تحقق ايتديكندن مثلا ه ح، ه ف مستقيمين متلاقيندن كچن مستوينك هر نقطه‌سى دخى محل مذكور اوزرنده بولنديغى آكلاشيلور . يعنى محل هندسىٔ مفروض بو مستويدن عبارت اولمش اولور .

§ ٣)

دعوى : (شكل — ٦) بر مستقيمك بر ف نقطه‌سنده كنديسنه عمود

اولان و ح، و ى، و ه ..... الخ مستقيملرينك محل هندسيسى بر مستوى اولور .

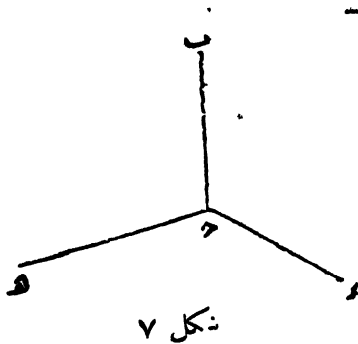
اثباتى : و نقطه‌سندن اعتباراً ب بَ مستقيمى اوزرنده ب و = و بَ قطع و محلك هر قنغى بر ى نقطه‌سى ب ، بَ نقطه‌لرينه وصل اولندقده ى ب و ، ى بَ و مثلث قائم الزاويه‌لرينك {ه . § ۲۰ ، تنبيه} مساواتندن ب ى = ى بَ اولوب بونكله دعوامز {§۲}يه رجوع ايدرك اكا عطفاً محل هندسئ مفروضك بر مستويدن عبارت اوله‌جغى آكلاشيامش اولور .

تعريف : برمستقيمك بر نقطه‌سى اطرافنده مستقيم مذكوره اقامه اولنيان عمودلرك كافه‌سنى محتوى اولان مستوى‌يه مستقيم معلومك «مستوىٔ قائمى » تعبير اولنور . بر مستوى اوزرنده واقع اولان و بر نقطه‌ده تلاقى ايدن مستقيملرك اشبو تلاقى نقطه‌سنده مذكور مستقيملرك كافه‌سنه قائماً موضوع اولان مستقيم، مستوينك بر «ناظمى» ويا «عمودى» اولور . بو عمودك مستوى‌يى قطع ايلديكى نقطه‌يه « موقع عمود » دينلور.

نتايج

۱): بر مستوينك اوزرنده واقع مستقيمين متلاقيينك نقطهٔ تلاقيسنده مذكور مستقيملره عمود اولان مستقيم موقع عمودن كچن و مستوينك اوزرنده بولنان بالجمله مستقيملره وبناءً عليه مستوى‌يه دخى عمود اولور .

۲): بر مستوى‌يه عمود اولان مستقيم ، موقعندن كچوب مستوى اوزرنده بولنان بالجمله مستقيملره دخى عمود اولور.


شکل ٧

٣): برمستوینك اوزرنده ویاخارجنده واقع برنقطه‌دن مستوئ مذکوره یالکز بر عمود اقامه ویا تنزیل اولنور و بالعکس بر مستقیمك اوزرنده ویاخارجنده بولنان برنقطه‌دن مستقیم مذکوره یالکز برمستوئ قائم کچیریلور.

§ ٤)

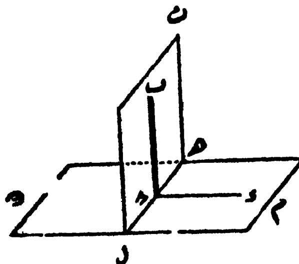
مسئله : (شکل — ٧) بر ب ح مستقیمنك بر ح نقطه‌سنده مستقیم مذکورك مستوئ قائمنی رسم ایتمك مطلوبدر.

صورت حلی: ب ح مستقیمندن کیف ما اتفق ایکی مستوی کچیریلوب اشبو مستویلر داخلنده بولنمق اوزره ح نقطه‌سندن مستقیم معلومه ایکی ح د، ح ه عمودینك اقامه‌سی کافیدر. چونکه بو ایکی عموددن کچن مستوی {§ ٣، نتیجه (١)} مطلوب اولان مستویدن عبارت اولور.

§ ٥)

مسئله : (شکل — ٨) بر (م ه) مستویسی اوزرنده واقع هر هانکی بر ح نقطه‌سندن مستوئ مذکوره بر عمود اقامه ایتمك مطلوبدر.

صورت حلی : اولاً. معلوم اولان ح نقطه‌سندن مستوی اوزرنده کیف ما اتفق بر ح د مستقیمی آلنور. ثانیاً، نقطهٔ مذکوره‌ده ح د مستقیمنك مسئلهٔ سابقه‌یه توفیقاً (ك ل) مستوئ قائمی رسم ایدیلور. ثالثاً، ینه مذکور نقطه‌دن مستوئ قائم ایله مستوئ معلومك ل ه فصل مشترکنه و مستوئ قائم داخلنده ح ب عمودی اقامه اولنور. ایشته اشبو ح ب عمودی مستوئ معلومك ایکی


شکل ٨

مستقیمنه [بری مستویٔ قائم ایله مستویٔ معلومك فصل مشترکی اولان ل هـ، دیکری مستویٔ قائمك ترسیمنه یارایان حء مستقیم مفروضی] عمود بولندیغی ایچون { ٣§، نتیجه ١ } مستوی‌یه دخی عمود اولور .

§ ٥، ١)

مسئله : (شکل — ٧) بر ب ح مستقیمنك خارجنده واقع بر ء نقطه‌سندن مستقیم مذکوره بر مستویٔ قائم رسم ایتمك مطلوبدر .

صورت حلی : ء نقطه‌سندن ب ح مستقیمنه ء ح عمودی تنزیل و ح موقع عمودندن ، باشقه بر مستوی داخلنده ح هـ عمودینی اقامه ایتمك کافیدر. ء ح ، ح هـ مستقیملرندن کچن مستوی { § ٣ ، نتیجه ٣ } مطلوب اولان مستویدن عبارت اولور .

§ ٦)

دعوی: عینی بر مستوی‌یه عمود اولان مستقیملر یکدیکرینه موازی اولور .

اثباتی : (شکل — ٩) مثلا م ب، مَ بَ مستقیملری (ك ل) مستوینك ایکی عمودندن عبارت اولسون . م، مَ یی وصل، ء ح ⊥ م مَ رسم ، ح م=م ء قطع ایدیلور و شکلك اقسام سائره‌سی اکمال اولنورسه :

Δ ء ب م ≅ م ح ب { هـ . § ٢ . تنبیه } اولدیغندن ب ح = ب ء

Δ ء م مَ ≅ م ح مَ « « « « مَ ء = مَ ح ،

Δ ء مَ بَ ≅ بَ مَ ح « « « « بَ ء = بَ ح

اوله‌جغی یعنی م، مَ، ب، بَ نقطه‌لرینك هر بری ء، ح نقطه‌لرندن ابعاد متسا-

قیده بولنه‌جغی بالسهوله آکلاشیله‌جغندن {٢ §} مب، مَبَ عمودلری عینی ممَبَ مستویسی داخلنده بولنوب هر ایکیسی عینی مستوی داخلنده بولنان ممَ مستقیمنه عمود اولدیغندن {هـ. § ١٠١١، ١)} بر برینه موازی اولور.

شکل ٩

§ ٧)

تنبیه : خطین متوازیندن بریسی بر مستوی‌یه عمود اولسه دیکری دخی مذکور مستوی‌یه عمود اولور.

§ ٧٠١)

دعوی : بر مستقیمه عمود اولان مستویلر یکدیکرینه موازی اولور .

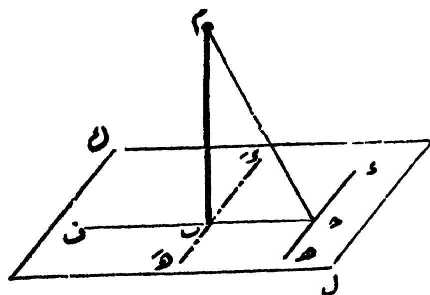
اثباتی : موازی اولمسه {١ § ٠ (٨)} بر مستقیم استقامتنده تلاقی ایده‌جکی جهتله فصل مشترکلری اوزرنده واقع هر قنغی بر نقطه ایله مستقیم معلومك موقع عمودلری بیڭلری وصل اولندقده مستقیم موصوللر {١ § ٠ (٥)، ثانیاً} بر مستوی اوزرنده بولندیغندن و مستقیم معلوم ایسه {٣ §، نتیجه ٢)} مستقیم موصوللره عمود اوله‌جغندن بر مستوی داخلنده بر نقطه‌دن بر مستقیمه ایکی عمودك تنزیلی ایجاب ایدرکه بوده {هـ. ١٦ § ٠ (٣)}

خلاف حقیقتدر . بناءعلیه بر مستقیمه عمود اولان مستویلر متلاقی اولمیوب یکدیکرینه موازی اولور .

§ ٨)

مسئله : (شکل — ١٠) بر (ك ل) مستویسنك خارجنده واقع بر م نقطه‌سندن بر عمود تنزیل ایتمك .

صورت حلی : ك ل مستویسی اوزرنده کیف ما اتفق بر ء ه مستقیمی اخذ ، م نقطه‌سندن م ح ⊥ ء ه ، ح نقطه‌سندن ف ح ⊥ ء ه رسم اولندقدن صوکره م نقطه‌سندن ف ح مستقیمنه تنزیل اولنان م ب عمودی مطلوب اولان عموددن عبارت اولور . چونکه ب نقطه‌سندن ك ل مستویسی داخلنده ب ءَ ‖ ح ء رسم اولندقده ح ء مستقیمی {§ ٣، نتیجه ١)} م ح ب مستویسنه عمود اولدیغندن {§ ٧} ب ءَ دخی مذکور مستوی‌یه و بناء علیه ب م مستقیمنه‌ده عموداولور. ایمدی م ب



شکل ١٠

مستقیمی ك ل مستویسی داخلنده واقع ح ف ، ب ءَ مستقیملرینه عمود اولدیغندن اشبو ك ل مستویسنه دخی {§ ٣، نتیجه ١)} عمود اولمش اولور .

§ ٨، ١)

دعوی : «اوج عمود دعواسی» (شکل — ١٠) هر قنغی بر ك ل مستویسنك خارجنده واقع بر م نقطه‌سندن تنزیل اولنان م ب عمودینك ب موقعندن مستوی اوزرنده واقع هر قنغی بر ء ه مستقیمنه برعمود اقامه

ایدیلور و (ح) موقع عمودیله م بینی وصل اولنورسه م ح مستقیم موصولی
ء ه مستقیمنه عمود اولور.

اثباتی : ب ءَ ‖ ح ء رسم ایدلدکده م ب ⊥ ب ءَ ، ب ح اولد-
یغندن ب ءَ مستقیمی {§ ۳ ، نتیجه ۱)} م ب ح مستویسنه عمود اولمغله
بوکا موازی اولان ح ء مستقیمی دخی {§ ۷} مستویٔ مذکوره
و {§ ۳ ، نتیجه ۲)} موقعندن کچن ح م مستقیمنه دخی عمود اولمش
اولور.

اخطار: بر نقطه‌دن بر مستوی‌یه تنزیل اولنان عمود نقطهٔ مذکوره
ایله مستوی آره‌سنده موجود اولان مسافه‌لرك ، تعبیر دیکرله نقطهٔ مذکو-
ره‌دن کچن مستقیم مائللرك اقصری [(شکل — ۱۰) م ب < م ح] اولدیغی
آشکار اولوب عمود مذکوره نقطه‌نك مستوی‌یه اولان «بعدی» تسمیه
اولنور .

(§ ۹

دعوی : ایکی مستقیمدن هر بری اوچنجی بر مستقیمه موازی اولورسه
کندیلری دخی یکدیکرینه موازی اولور .

اثباتی : اوچنجی مستقیمك مستویٔ قائمی رسم اولندقده {§ ۷}
مذکور ایکی مستقیمدن هر بری دخی اشبو مستویٔ قائمه عمود اوله‌جغندن
{§ ٦} یکدیکرینه موازی اولور .

(§ ۱۰

دعوی: بعد مجردده ضلعلری نظیر نظیره موازی اولان زاویه‌لر بر برینه

مساوی اولور.

اثباتی: (شکل — ۱۱) ده ب ء ‖ و = ءَ بَ ، ء ح ‖ و = ء ح

رسم و اخذ ، ء ءَ ، ب بَ ، ح حَ وصل اولنـدقده : {ه ۰ § ٤٢}

ب بَ ‖ و = ءَ ء ، ح حَ ‖ و = ء ءَ اولوب {§ ۹} ب بَ ‖ و = ح حَ

و بنـاء علیه ب ح ‖ و = بَ حَ اولدیغنـدن

△ ب ح ء ≅ بَ حَ ءَ اولمغله ب ء ح = بَ ءَ حَ

اولمش اولور.

شکل ۱۱

اخطار: بعـد مجردده یکدیکرینی قطع ایتمیـان و موازی بولنمیـان ایکی مسـتقیمك میلی هر قنغی بر نقطـه‌دن مذکور مستقیملره موازی رسم اولنان ایکی مستقیمك تشـکیل ایتدیکی زاویه ایله تقدیر اولنور.

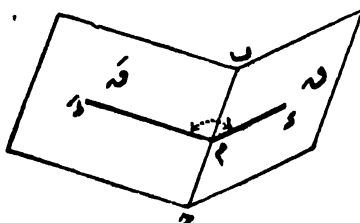
تعریفات

§ ۱۱

(۱): (شکل — ۱۲) ایکی و، و مسـتویسی آره‌سـنده‌کی زاویه‌یه «مستوییـن زاویه‌سی»؛ و،وَ مستویلرینه «وجه»؛ ب ح فصل مشترکنه «ضلع مجسم» نامی ویریلور. مستویین زاویه‌سی ب ح ضلع مجسمی اوزرنده واقع هر قنغی بر م نقطه سندن وجهلری داخلنـده اولمق اوزره ضلع مجسم مذکوره اقامه اولنـان م ء، م ءَ عمودلری آره‌سنده‌کی ء م ءَ زاویه‌سیله تقدیر و اشـبو زاویه‌یه مستویین زاویه‌سـنك «مقیاس زاویه‌سی» تعبیر اولنور.

(۲): ضلع مجسمك هر قنغی برنقطه‌سندن وجهلره رسم اولنان ناظملرك آره‌سنده‌كی زاویه، ناظملرك بری داخله، دیكری خارجه طوغری اولدیغنه نظراً مقیاس زاویه‌سنه مساوی وهرایكیسی برجهتده بولندیغنه كوره مقیاس زاویه‌سنك متممی اولدیغی آز ملاحظه ایله آكلاشیلور .

(۳) : مستوین زاویه‌سی ضلع مجسمیله [و مثلا (شكل — ۱۲) ب ه ء طرزنده] ارائه اولنور. اكر ضلع مجسم دیكر مستوین زاویه‌لرنده دخی مشترك بولنورسه اول وقت مستوین زاویه‌سی ضلع مجسم اورته‌یه كلمك اوزره وه ب ه وَه مثللو كوستریلور .



شكل ۱۲

(٤) : مقیاس زاویه‌لری مساوی اولان مستوین زاویه‌لری بربرینه مساوی اولدیغی كبی بالعكس مساوی مستوین زاویه‌لرینك مقیاس زاویه‌لری دخی یكدیكرینه مساوی اولور. چونكه ضلع مجسملری بربری اوزرینه كله‌جك صورتده برر وجهلری یكدیكرینه تطبیق ایدلدكده دیكر وجهلر دخی تماماً یكدیكرینه منطبق اولور.

(٥) : مقیاس زاویه‌سی قائمه اولان مستوین زاویه‌سنك وجهلری یكدیكرینه عمود بولنور ، تعبیر دیكرله قائماً واقع اولور . علی العموم بر مستوی دیكرینی قطع ایدوب ده طرفینده یكدیكرینه مساوی ایكی مستوین زاویه‌سی تشكل ایدر یعنی مقیاس زاویه‌لری بربرینه مساوی اولورسه مذكور مستویلر بربرینه قائماً واقع اولور. بوكا عطفاً :

(٦): بر مستوی اوزرنده واقع بر مستقیمدن مستوی مذكوره عمود اولمق اوزره یالكز برمستوی اقامه ایدیلور وبالعكس بر مستوینك خارجنده

واقع بر مستقيمدن كچەرك مستویٔ مذكوره قائماً يالكز بر مستوى تنزيل اولنور .

(٧) : معلوم بر مستوى‌يه عمود اولان مستقيمدن كچن هر مستوى ، مستویٔ معلومه عمود اولور . چونكه حاصل اولان مستويين زاويه‌سنك مقياسى دائما قائمه‌در .

(٨) : ايكى مستوى اوچنجى بر مستوى‌يه عمود اولسه مذكور ايكى مستوينك فصل مشتركى دخى اوچنجى مستوى‌يه عمود اولور. زيرا فصل مشترك نقطه‌سندن اوچنجى مستوى‌يه اقامه اولنان عمود ايكى اولكى مستوينك ايكيسى اوزرنده بولنور. يعنى فصل مشتركدن عبارت اولور .

(٩) : بر مستویٔ معلومه مائلاً واقع بر مستقيمدن كچمك اوزره مستویٔ معلومه، يالكز بر مستویٔ قائم رسمى ممكندر. چونكه مستقيم مائل اوزرنده واقع هر قنغى برنقطه‌دن مستویٔ معلومه يالكز بر عمود اقامه وتنزيل اولنه‌بيلور.

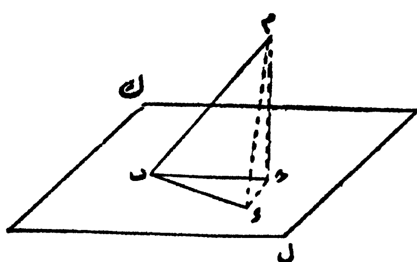
(١٠): بر نقطه‌نك بر مستوى اوزرينه « مرتسمى » نقطهٔ مذكوره‌دن مستویٔ معلومه تنزيل اولنان عمودك موقعندن و على العموم بر خطك مرتسمى : حاوى اولديغى كافهٔ نقاطك مرتسملرندن عبارتدر. مستویٔ معلومه « ارتسام مستويسى » و عمودلره «عمود راسم» دينلور.

(١١): بر مستقيمك برمستوى اوزرينه مرتسمى كذلك بر مستقيمدر. چونكه مركب اولديغى كافهٔ نقاطدن مستوى‌يه تنزيل اولنان عمودلرك موقعلرى مستقيم مذكوردن كچوب مستویٔ معلومه عمود اولان برمستوينك فصل مشتركى اوزرنده بولنور . بوحالده بر مستقيمك مرتسمى كنديسندن كچوب ارتسام مستويسنه عمود اولان بر مستوينك ارتسام مستويسيله فصل

مشترکندن عبارتدر . اشبو مستوی‌ٔ عموده « مستوی راسم » تعبیر اولنور. ارتسام مستویسنه عمود اولان بر مستقیمك مرتسمی بر نقطه‌اوله‌جغی آشکاردر .

(۱۲) : بر مستقیمك کندی مرتسمی ایله احداث ایلدیکی زاویه : مستقیمك ارتسام مستویسنی قطع ایلدیکی نقطه‌دن کچن وبو مستوی داخلنده بولنان سائر مستقیملر ایله تشکیل ایتدیکی زاویه‌لردن کچوکدر.

چونکه (شکل — ۱۳) ب ح ، (م ب)نك ك ل ارتسام مستویسنده مرتسمی اولسون. ارتسام مستویسی داخلنده ب نقطه‌سندن چیزیلان کیف ما اتفق بر مستقیم اوزرنده ب ء = ب ح اخذ ؛ م ایله ء ، ح بینلری وصل اولندقده { هـ . § ۲۵ . (۲) } م ح < م ء اولوب ب ح م ، ب ء م مثلثلرندن {هـ.§۲۹.تنبیه} م ب̂ ح < م ب̂ ء بولنور .



شکل ۱۳

(۱۳) : بر مستقیمك کندی مرتسمیله احداث ایلدیکی زاویه ، مستقیمك ارتسام مستویسنه اولان میلندن عبارت اولوب اشبو زاویه مستقیم مذکورك ارتسام مستویسنه عمود بر مستقیم ایله تشکیل ایتدیکی زاویه‌نك تمامنه مساویدر .

(۱٤) : بر مستوی‌یه موازی اولان بر مستقیم ایله مستوی آره‌سنده‌کی بعد و مسافه مستقیمك هر قنغی بر نقطه‌سندن مستوی‌یه و

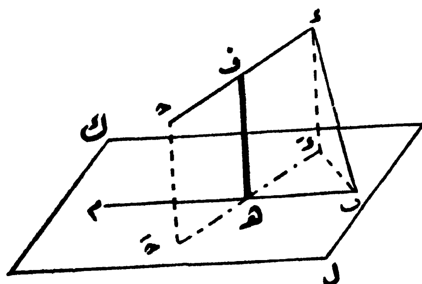
(۱٥) : مستویین متوازیین آره‌سنده‌کی بعد ومسافه دخی برینك کیف ما اتفق بر نقطه‌سندن دیکرینه، تنزیل اولنان عموددن عبارتدر.

§ ۱۲)

مسئله — (۱): بربرینه موازی وملاقی اولمیان ایکی مستقیمك بریسندن برمستوی امرار ایتمك مطلوبدرکه دیکرینه موازی اولسون.

صورت حلی: مذکور مستقیملردن بریسنك کیف ما اتفق بر نقطه‌سندن دیکرینه بر موازی رسم ایدیلوب بو وجهله حاصل اولان مستقیمین متلاقیندن امرار ایدیلان مستوی {§ ۱ ، (٦)} مستوی مطلوبدن عبارت اولور.

(۲): بربرینه موازی و ملاقی اولمیان ایکی مستقیمه عمود مشترك رسم ایتمك مطلوبدر.



شکل ۱٤

صورت حلی: اولاً (شکل — ۱٤) مذکور مستقیملرك بریسندن [فرضا م ب دن] دیکرینه [یعنی ح ء مستقیمنه] موازی اولان (ك ل) مستویسی کچیریلور، ثانیاً: ح ء مستقیمنك (ك ل) مستویسی اوزرینه حَ ءَ مرتسمی آلنور، ثالثاً: اشبو مرتسم ایله م ب مستقیمنك فصل مشترکی اولان هـ نقطه‌سندن هـ ف ⊥ (ك ل) [یعنی هـ ف ‖ ححَ ویا ءءَ] رسم ایدیلور. بو حالده هـ ف مطلوب اولان عمود مشترکدن عبارت اولور.

§ ۱۲، ۱)

وظائف

۱): بعد مجردده واقع بر نقطه‌دن بر مستقیمه یالکز بر موازی ویا عمود رسم اولندیغنك ،

ب): بر مستوینك خارجنده واقع بر نقطه‌دن تنزیل اولنان عمودك موقعندن، موقعلری مساوی بعدده بولنان مستقیم مائللرك بربرینه مساوی اولدیغنك ، موقعی اوزاق اولان مستقیم مائلك موقعی یقین اولاندن اوزون بولندیغنك ،

ج): بر مستقیم بر مستوی اوزرنده بولنان بر مستقیمه موازی اولسه مستوئ مذکوره دخی موازی اولدیغنك،

د): معلوم برمستوی‌یه موازی اولان بر مستقیمدن کچن برمستوینك مستوئ معلوم ایله فصل مشترکنك مستقیمه موازی اولدیغنك ،

ه): برمستوی‌یه موازی اولان بر مستقیمدن کچن مستویلرك مستوئ معلوم ایله فصل مشترکلری یکدیکرینه موازی اولدیغنك ،

و): ایکی موازی مستقیمدن برینه موازی اولان مستوینك دیکرینه دخی موازی اولدیغنك ،

ز): معلوم بر مستقیمه موازی اولان ایکی مستوینك فصل مشترکی مستقیم معلومه موازی اولدیغنك ،

ح): مستویین متوازیینك مستوئ آخرله فصل مشترکلرینك یکدیکرینه موازی اولدیغنك ،

ط): مستویین متوازیینك آره‌سنده، محصور موازی قسم مستقیملرك مساوی اولدیغنك ،

ی): مستویین متوازیینك بعدلری یکدیکرینه مساوی اولدیغنك ،

ك): برمستقیمه عمود اولان ایکی‌مستوینك یکدیکرینه موازی اولدیغنك،

ل): بر نقطه‌دن بر مستوی‌یه موازی اوله‌رق یالکز بر مستوینك رسمی ممکن اولدیغنك ،

م) : خطين متوازيندن بريسى بر مستوى‌يه عمود اولسه ديكرى دخى مستوىٔ مذكوره عمود اولديغنك ؛

ه) : برمستوى‌يه موازى اولان ايكى مستوينك يكديكرينه دخى موازى اولديغنك ؛

س) : بر مستقيمدن كچه‌رك بر مستوى‌يه يالكز بر مستوىٔ قائم رسم اولنديغنك ؛

ع) : معلوم بر مستقيمه عمود اولان ديكر بر مستقيم ، مستقيم معلومك مستوىٔ قائمنه موازى اولديغنك وياخود مستوىٔ مذكور داخلنده بولنديغنك ؛

ف) : بر مستوينك خارجنده واقع بر نقطه‌دن مستوىٔ مذكوره رسم اولنان موازيلرك محل هندسيسى نه اولديغنك ؛

ص) : يكديكرينه عمود اولان ايكى مستويدن بريسنك داخلنده بولنمق اوزره فصل مشتركلرينه تنزيل ويا اقامه اولنان عمودلرك ديكر مستوى‌يه عمود اولديغنك ؛

ق) : يكديكرينه عمود اولان ايكى مستويدن بريسنك داخلنده واقع بر نقطه‌دن ديكرينه تنزيل اولنان عمودك مستويلرك فصل مشتركنى قائماً قطع ايتديكنك ؛

ر) : بر مستويدن مساوى بعد و مسافه‌ده بولنان بالجمله نقاطك محل هندسيسى نه اولديغنك ارائه‌سى مطلوبدر .



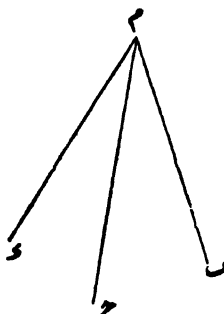
ایکنجی فصل

مبحث زوایای مجسمه

§ ١٣)

تعریفات

بعد مجردده واقع بر م نقطه‌سنده ملاقی اولان ؛ م ب ، م ح ، م ء مثللو (شکل — ١٥) ده کوستریلان اوچ مستقیمك هر ایکیسندن برر مستوی امرار ایدیلورسه «اوچ وجهلی» (ذوثلثة وجوه) و علی العموم بر نقطه‌ده تقاطع ایدن ن قدر مستقیملرك هر ایکیسندن معین برصره اوزره برر مستوی کچیریلورسه «ن وجهلی» بر زاویهٔ مجسمه تحدث ایلر. نقطهٔ مذکوره‌یه زاویه‌نك «رأسی» ، مستقیملرك هر بریسنه «ضلع مجسمی»



شکل ١٥

هر ایکی ضلع مجسمدن کچن مستوی‌یه «وجهی» ، هرایکی ضلع مجسمی آره‌سنده‌کی بمح ، حمء ، ءمب زاویه‌لرینه «زاویهٔ وجهیه‌سی» و هر ایکی وجهی بیننده‌کی زاویه‌یه «مستویین زاویه‌سی» تسمیه اولنور. بوکتابده یالکز «زوایای محدبه» دن یعنی هرزاویهٔ وجهیه‌سی ومستویین زاویه‌سی ایکی قائمه‌دن کجوك اولان وهیچ بر مستقیم ایله ایکیدن زیاده نقطه‌ده قطع

ایدیله‌میان و بر مستوی ایله مقطعی برشکل ذوکثیر الاضلاع محدبدن عبارت اولان زوایای مجسمه‌دن بحث اولنه‌جقدر .

زاویهٔ مجسمه یا یالکز رأسیله مثلا م ایله ویاخود رأس نقطه‌سی وضلع مجسملری اوزرنده برر نقطه آلنه‌رق: م (ب ح ی) ایله ارائه ایدیلور .

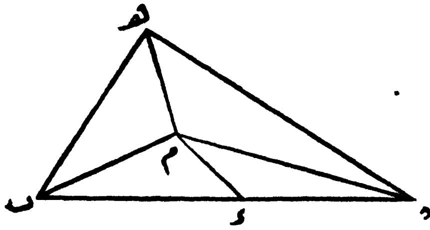
§ ١٤)

(شکل — ١٦) م (ب ح ی) مثللو برزاویهٔ مجسمه‌نك م رأسنده وجهلرك هر بریسنه اقامه اولنان م بَ، م حَ، م یَ عمودلری واسطه‌سیله تشکل ایدن ایکنجی م (بَ حَ یَ) زاویهٔ مجسمه‌سنه اولکینك « متممی » ویا « قطبیسی » تعبیر اولنور. ایکنجی زاویهٔ مجسمه‌نك هر ایکی متعاقب ضلع مجسمی (مثلا م بَ ایله م حَ، م حَ ایله م یَ، م یَ ایله م بَ)، عمود اولدیغی ایکی (م ح ی ایله م ب ی؛ م ب ی ایله م ب ح؛ م ب ح ایله م ح ی) وجهك فصل مشترکنه {§٣، نتیجه(٢)} عمود بولندیغندن برنجیسنك دخی هر ضلع مجسمی ایکنجیسنك ایکی ضلع مجسمنه (م ب ⊥ م یَ ، م حَ ؛ م ح ⊥ م یَ ، م بَ ؛ م ی ⊥ م حَ ، م بَ) یعنی {§ ٣ ، نتیجه ١} بر وجهنه عمود بولنمغله معلوم اولان زاویهٔ مجسمه «قطبیسنك قطبیسی» (یکدیکرینك قطبیسی) دخی اولور. مذکور ایکی زاویهٔ مجسمه‌دن برینك زاویهٔ وجهیه‌لری {§ ١١، (١)} دیکرینك مستویین زاویه‌لرینك متممی اولدیغی وبالعکس برینك مستویین زاویه‌لری دیکرینك زاویهٔ وجهیه‌لرینك متممی بولندیغی آزملاحظه ایله آکلاشیلور .

شکل ١٦

١٥ §

دعوی : اوچ وجهلی زاویهٔ مجسمه‌ده هر زاویهٔ وجهیه دیکر ایکیسی مجموعندن کچوکدر .



شکل ١٧

اشبو دعوانك زوایای وجهیه‌دن اك بیوکی و مثلا (شکل–١٧) م (ب ح هـ) زاویهٔ مجسمه‌سنك اك بیوك اولان ب م ح زاویهٔ وجهیه‌سی حقنده اثباته احتیاجی اولمغله یالکنز بونك اثباتی ایله اکتفـا ایدیله‌جکدر . بونك ایچون ب م ء = ب م هـ ، م ء = م هـ اخذ و رسم و زاویهٔ مجسمه ب ء ح هـ مستویسیله قطع ایدلدکده { هـ . § ٢٠ } △ ب م ء ≅ ب م هـ اولوب بو سببدن ء ب = هـ ب و بناء علیه ح ء = ح ب — هـ ب اولور. حالبوکه { هـ . § ١٤ ، (٢) } ح ب — هـ ب < ح هـ اولدیغندن ح ء < ح هـ اولمغله { هـ § ٣٩ ، (٢) } ح م ء < ح م هـ اولوب ب م ء = ب م هـ مساواتیـله طرف طرفه جمع ایدلدکده :

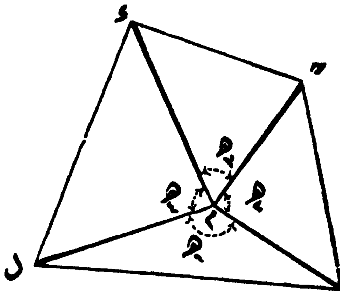
ح م ب < ح م هـ + هـ م ب اولمش اولور.

تنبیه: ن وجهلی زاویهٔ مجسمه‌ده هرزاویهٔ وجهیه دیکر زاویهٔ وجهیه مجموعندن اصغردر .

١٦ §

دعوی : ن وجهلی هرزاویهٔ مجسمه‌ده اولاً: زاویهٔ وجهیه‌لر مجموعی (٤ قا) دن کچوك و ثانیاً: مستوینن زاویه‌لری مجموعی { (٢ن—٤)قا } دن بیوکدر .

اثباتی:— (شکل—١٨)اولاً : م (ب ح د ل) زاویهٔ مجسمه‌سنك زاویهٔ



شکل ١٨

وجهیه‌لری مجموعی «مج ه» ایله ارائه اولنوب زاویهٔ مجسمهٔ مذکوره برمستوی ایله قطع اولندقده حاصل اولان ب ح د ل ذو کثیر الاضلاعنك هر رأسنده اوچ وجهلی برر زاویهٔ مجسمه و ذو کثیر الاضلاعنك عدد رأسلری، زاویهٔ مجسمهٔ معلومه‌نك وجهلری قدر اولدیغندن، اطرافنده ن قدر اوچر وجهلی زوایای مجسمه تشکل ایدر. ایمدی مذکور اوچ وجهلی زاویهٔ مجسمه‌لرك هربرنده برر زاویهٔ وجهیه، ذو کثیر الاضلاعك برر زاویه‌سندن عبارت اولوب اشبو زاویهٔ وجهیه‌لرك هر بری ایسه {§ ١٥} مجاوری اولان دیکر ایکی زاویهٔ وجهیه مجموعندن اصغر [مثلا د ل ب > د ل م + م ل ب] در. بو حالده ذوکثیرالاضلاعك زوایاسی مجموعی، هرزاویه‌سنه مجاور اولان ایکیشر زاویهٔ وجهیه‌لرك مجموعندن کچوکدر. حالبوکه ذوکثیر الاضلاعك زوایای داخله‌سی مجموعی {ه. § ٤٧} (٢ن — ٤) قا اولدیغندن و هر وجه مثلث شکلنده بولندیغندن:

(٢ن — ٤)قا > (٢قا — ه١) + (٢قا — ه٢) + (٢قا — ه٣) + ... اولوب

٢ن قا — ٤قا > ٢ن قا — (ه١ + ه٢ + ه٣ + ...) ∴

٢ن قا — ٤قا > ٢ن قا — مج ه ∴

— ٤قا > — مج ه ویاخود — مج ه > — ٤ قا اولوب

طرفینی (— ١) ایله ضرب ایدیلورسه غیر مساوی اشارتنك دخی جهتی تبدل ایده‌جکندن :

مج ه < ٤ قا   اولمش اولور.

ثانياً : $ب_1$، $ب_2$، $ب_3$، ...... ايله ن وجهلى زاويهٔ مجسمه‌نك مستويين زاويه‌لرى؛

$هَ_1$ ، $هَ_2$ ، $هَ_3$ ، ...... ايله زاويهٔ مجسمهٔ معلومه‌نك قطبيسى اولان زاويهٔ مجسمه‌نك زاويهٔ وجهيه‌لرينى كوسترەلم: {١٤§}ه توفيقاً:

$ب_1 + هَ_1 = ٢$ قا
$ب_2 + هَ_2 = ٢$ قا
$ب_3 + هَ_3 = ٢$ قا   } اولوب طرف طرفه جمع ايدر
....
....

و (مج ب) ايله: $ب_1 + ب_2 + ب_3 + ...$ مجموعنى،
(مج هَ) ، $هَ_1 + هَ_2 + هَ_3 + ...$ ،   } كوستررسه‌ك

مج ب + مج هَ = ٢ ن قا   وياخود
مج ب = ٢ ن قا — مج هَ   بولنور.

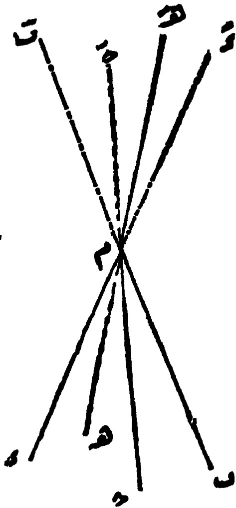
لكن برنجى شقه نظراً مج هَ < ٤ قا اولديغندن بالاده‌كى مساواتده مج هَ يرينه بوندن اعظم اولان (٤قا) وضع اولنورسه:
مج ب > ٢ ن قا — ٤ قا ∴ مج ب > (٢ ن — ٤) قا بولنمش اولور.

تنبيه: مج ه، (٠) ايله (٤ قا)؛ مج ب، {(٢ن—٤)قا} ايله (٢ ن قا) آره‌سنده بولنور.

§ ١٧

(شكل — ١٩) م (ب ح ء ه) مثللو بر زاويهٔ مجسمه‌نك ضلعلرينك

استقامت اوزره اخراجندن حاصل اولان م (بَ حَ ءَ هَ) زاویهٔ مجسمه‌سی، اولکینك «رأساً مقابلیدر»، رأساً مقابل زاویهٔ



مجسمه‌لرك زوایای وجهیه‌سی و مستوین زاویه‌لری عینی بر صره تحتنده یکدیکرینه مساوی ایسه‌ده جهتلری بربرینك عکسی اولدیغندن مذکور زاویهٔ مجسمه‌لر صورت عمومیه‌ده تماماً بربرینه منطبق اوله‌مدیغی اجلدن شکلاً دخی بربرینه مساوی اوله‌ماز. بعد مجردده اقسامی یکدیکرینه معکوس بر طرزده صره ایله بربرینه مساوی اولمق اوزره تشکل ایدن بومثللو شکللره «متناظر» و م نقطه‌سنه «نقطهٔ تناظر» تعبیر اولنور. بوتعریفه کوره رأساً مقابل اولان زاویهٔ مجسمه‌لر «متناظر» اولور.

شکل ١٩

دعاوی

(١): ایکیشر زاویهٔ وجهیه‌سیله آره‌لرنده‌کی مستوین زاویه‌لری

(٢): برر زاویهٔ وجهیه‌سیله بونلره مجاور اولان ایکیشر مستوین زاویه‌سی،

(٣): اوچ زاویهٔ وجهیه‌سی،

(٤): اوچ مستوین زاویه‌سی ؛

یکدیکرینه مساوی اولان اوچ وجهلی ایکی زاویهٔ مجسمه هم بربرینه مساوی وهم متناظر اولور. [یعنی رأساً مقابل اوچ وجهلی ایکی زاویهٔ وجهیه شکلاًده مساوی اولور .]

(٣.٢،١) نجی دعوالر هندسهٔ مسطحه‌ده مثلثلرك عینی نومرو تحتنده بولنان مساوات دعوالری مثللو اثبات اولنور.

(٤) نجی دعوی، زاویهٔ معلومه‌نك قطبیسنی آلمق صورتیله (٣) نجی دعوی‌یه ارجاع ایدیلور.

تنبیه : ایکی زاویهٔ وجهیه و بونلردن برینه مقابل مستویین زاویه‌سی ویاخود ایکی مستویین زاویه‌سی و بونلردن برینه مقابل زاویهٔ وجهیه‌سی معلوم اولان اوچ وجهلی زاویهٔ وجهیه‌نك اقسام متباقیه‌سی قطعیاً و تماماً تعیین اولنه‌مز.

§ ١٠١٧)

وظائف

ا) : ضلع مجسملری یکدیکرینه عمود اولان اوچ وجهلی بر زاویهٔ مجسمه‌ده مستویین زاویه‌لرندن هر بری نیم مساوی اولدیغنك؛

ب) : یکدیکرینه عمود اولان اوچ مستویدن متشکل اوچ وجهلی بر زاویهٔ مجسمه‌ده زاویهٔ وجهیه‌لردن هر بری نیم مساوی اولدیغنك؛

ح) : ضلع مجسملری یکدیکرینه عمود اولان اوچ وجهلی بر زاویهٔ مجسمه‌نك قطبیسی قاچ درجه‌لك زاویهٔ وجهیه و مستویین زاویه‌سنه مالك اولدیغنك ارائه‌سی مطلوبدر؛

ی) : درت دیوار آره‌سنده بولنان وطوانی مستوی برشکلده اولان بر اوطه‌ده قاچ زاویهٔ مجسمه واردر، قاچر وجهلیدر، رأسلری نره‌ده‌در.



اوچنجی فصل

اشكال كثيرة الوجوه — منشور — اهرام — اجسام ناقصه .

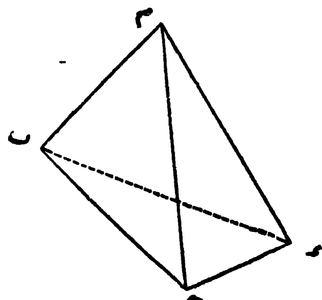
باب اول

مبحث ذو كثير الوجوه

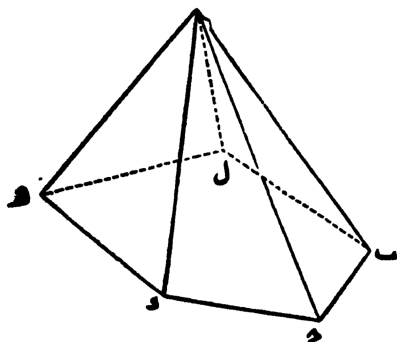
(§ ۱۸)

تعریفات

(۱) : (شكل — ۲۰) ب ج د مثلثلو دردنجی بر مستوی (وجه)



شكل ۲۰



شكل ۲۱

ایله تحدید اولنان اوچ وجهلی بر زاویهٔ مجسمه‌دن حاصل اولان شكله «ذو اربعة الوجوه» تعبیر اولنور. اشبو شكلك هر وجهی مثلث اولوب هر ایكی وجهك فصل مشتركنه «ضلع مجسم» و هر اوچ وجهك فصل مشترك نقطه‌سنه «رأس» دینلور.

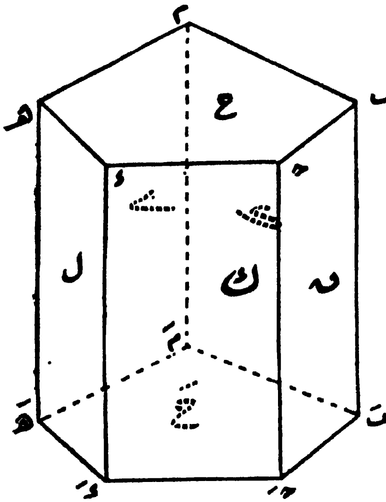
(۲): (شکل — ۲۱) ە وجهلی بر زاویهٔ مجسمه یکی بر ب ح ء ه ل مستویسی ایله تحدید ایدیلورسه: وجهلری مثلثدن، «قاعده‌سی» وجهلرك یکی مستوی ایله فصل مشترکلریلك تولید ایتدیکی شکل کثیر الاضـلاعدن عبارت اولمق اوزره « ە وجهلی بر اهرام » حاصـل اولور . وجهلرك مشترك نقطه‌سی ە وجهلی اهرامك « رأسی » واشـبو رأسدن اهرام مذ - کورك قاعده‌سنه تنزیل اولنان عمود«ارتفاعی» اولور .

(۳): اهراملر ، قاعده‌لری مثلث ، مربع ، مستطیل ، .... مخمس ، مسدس، .... اولدیغنه نظراً «اهرام مثلثی (شکل — ۲۰) ، مربعی (شکل—۳۲)، مستطیلی، .... مخمسی (شکل—۲۱)، مسدسی (شکل—۳۸) ....»ناملرینی دخی آلیر.

(٤): ذو اربعة الوجوهده (اهرام مثلثیده) هر قنغی بر وجه قاعده اتخاذ اولنه‌بیلور. بوحالده اشبو قاعده‌نك قارشوسنده‌کی رأسندن کندیسـنه تنزیل اولنان عمود ارتفاع اعتبار اولنور .

(٥): (شکل — ۲۲) ب بَ، ج جَ، ء ءَ، ه هَ، م مَ....... فصل مشترکلری یکدیکرینه موازی اولان، ە قدرهٔ، ك، ل، ے، ڪ .... مستویلرله محاط و ایکی ح، حَ مستویٔ موازی ایله محدود اولان شکله «ە وجهلی منشور» تعبیر اولنور. مذکور ایکی موازی مستویـنـك یکدیکرینه اولان بعـدی منشورك « ارتفاعندن » واشبوایکی مستوی اوزرنده، سائر مستویلر واسطه سیله ، تحدث ایدن ە ضلعلی ب ح ء ه م ، بَ جَ ءَ هَ مَ شـکللری منشورك

« قاعده‌لرندن » عبارت اولور . فصل مشترکلری موازی اولان مستویلر دخی برر متوازی‌الاضلاع اولوب منشورك « وجهلرینی» تشکیل ایدر .



شکل ٢٢

(٦): منشورلر ، قاعده‌لری مثلث، مربع ، متوازی‌الاضلاع، مستطیل..... مخمس ، مسدس ، ..... اولدیغنه نظراً « منشور مثلثی (شکل — ٣٧) ،مربعی، متوازی الاضلاعی ، مستطیلی (شکل — ٣٥) ..... مخمسی (شکل — ٢٢) ، مسدسی ، ..... » نامارینی دخی آلیر . وجهلری قاعده‌لرینه عمود اولورسه منشوره « قائم » دینیلور . منشور مستطیل قائمه ، قاعده‌لری ووجهلری موازی مستطیللردن مرکب اولدیغندن « متوازی‌المستطیلات » دخی تسمیه اولنورکه برأسنده بولنان اوچ ضلع مجسم یکدیکرینه عمود بولنوب متوازی‌المستطیلاتك « ابعاد ثلثه‌سی » وعینی بروجه اوزرنده بولنمیان ایکی رأس بیننه موصول‌مستقیمه « قطری » تعبیر اولنور .

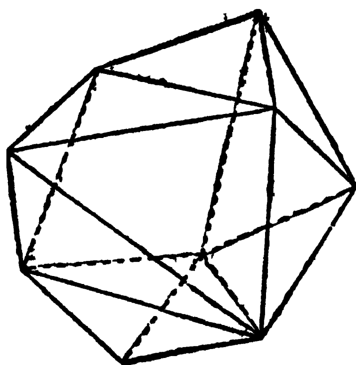
(٧) : متوازی‌المستطیلاتك‌ضلع مجسملری یکدیکرینه‌مساوی بولنورسه شکل مذکور « مکعب » نامنی آلیر .

(٨) : قاعده‌لری متوازی‌الاضـلاع [مربع ، معین ، مستطیل دخی

داخل] اولان منشورلرك مقابل وجهلری بربرینه موازی اولدیغی آشکار اولمغله بومثللو منشـورلرده هرقنغی مقابل ایکی وجه ، قاعده واولکی ایکی قاعده ، وجه اعتبار اولنه بیلور .

(٩) : منشـورك قاعده لرینه موازی مستویلر ایله حاصـل اولان مقطعلری [ضلعلری موازی مستقیملرله محصـور موازی قسم مستقیملردن عبارت اولوب زاویه لرینـك ضلعلری دخی عینی جهتده موازی اولدقلرندن] یکدیکرینه وقاعده لره مساوی اولور .

(١٠) : حجملرك مساحه سیچون برضلعی واحد قیاسی طوله مساوی اولان مکعب قوللانیلوب « برجسمك حاوی اولدیغی بومثللو مکعبلرك یعنی واحدقیاسی حجملرك مقداری » مساحهٔ حجمیه سندن عبارت اولور .



شكل ٢٣

(١١) : (شکل ــ ٢٣) علی العموم مسـتویلرله محاط اولان شـکل مجسمه « ذوکثیرالوجوه » تسمیه ایدیلور .

§ ١٩) [غ ٠ م ٠]

اویله ر (Euler) دعواسی

فرض اولنـان بر ذوکثیرالوجوهده عدد { رؤسی = ه ، وجوهی = ف ، اضلاعی = ت }

ه + ف = ت + ٢ اولور .

اثباتی : ذوکثیرالوجوهی تحدید ایدن ذوکثیرالاضـلاعلرك هر برینك عدد اضلاعی صره سیله :

[غ ٠ م ٠] شاکردانه مجبوری اولمیوب کوستریلمیه جك مواده اشارتدر .

ه١ . ه٢ .... هن وبونلرك مجموعی (مج ه) ؛
مذکور ذوکثیرالاضلاعلرك هربرنده زوایالك مجموعی :
م١ . م٢ .... من وکافه‌سنك زوایاسی مجموعی (مج م)
فرض اولنسون { ه . § ٤٧ } :

م١ = ٢ ه١ قا ـ ٤ قا
م٢ = ٢ ه٢ قا ـ ٤ قا
. . . .
. . . .
من = ٢ هن قا ـ ٤ قا

اولوب

ف قدر حاصل اولان اشبو مساواتلر طرف طرفه جمع اولندقده :

مج م = ٢ قا . مج ه — ٤ قا . ف بولنور .

لکن هر ضلع ایکی وجهده مشترك بولنمغله مج ه = ٢ و اولدیغندن

مج م = ٤ قا . و — ٤ قا . ف

ویاخود

مج م = ٤ قا (و — ف) . . . . (١) اولور .

ایمدی ذوکثیرالوجوهك [شکل ـ ٢٤ مثلا اون ایکی وجهلی شکلك] خارجنده برنقطه [م] آله‌لم که بونقطه ایله ذوکثیرالوجوهك رأسلری بیننه موصول [م ء ، م هَ ، م بَ ، م ح ، م ب ، م ءَ ، م ه ، م و ، م وَ] مستقیملرك جمله‌سی وجهلردن بریسنی و مثلا عدد اضلاعی ه١ [٤] اولان ف١ [ء ح ب ه] وجهنی قطع ایتسون . بو حالده ف١ وجهی اوزرنده ذوکثیرالاضلاعلردن مرکب برشبکه [ء ط ی ه ، ه ی ب ، ب ی ح ، ......] حاصل اولوب اشبو شکللردن هربرینك [مثلا ح ك ل] عدد اضلاعی ، کندیسنی تولیده یارایان مستقیملرك [م و ، م بَ ، م وَ] موصول اولدیغی رأسلر [وَ ، بَ ، وَ] آره‌سنده بولنان توجهك [و بَ وَ] عدد اضلا

شکل ٢٤

عنه مساوی بولندیغندن مذکور ذوکثیرالاضلاعلر ایله ف١ وجهنك زوایاسی مجموعی ذوکثیرالوجوهك وجهلرینك زوایاسی مجموعنه مساوی یعنی (مجم) اولور. بوکا بناءً (مجم):

اولاً: ف١ ذوکثیر الاضلاعنك زاویه‌لری (= ٢ ن١ قا — ٤ قا) ؛ {ه. § ٤٧}

ثانیاً: ف١ ذوکثیر الاضلاعنك ن١ قدر رأسنده حاصل اولان شبیکه زاویه‌لری [ى ح^ ط ، ط ح^ ك ، ك ح^ ح ، ح ح^ ب ، ح ب^ ح ، ح ب^ ى ، ى ب^ ح ؛ ......] (= ٢ ن١ قا — ٤ قا) ؛

ثالثاً: شبیکه‌نك ه — ن١ قدر داخلی نقطه‌لری [ى ، ط ، ك ، ل ، ح] اطرا-

قنده‌کی زاویه‌لر (=(هـ—ق١) ٤ قا) مجموعنه مساوی دیمکدر. بوحالده:

مج م= ٢ ق١ قا — ٤ قا + ٢ ق١ قا — ٤قا + ٤هـ قا — ٤ق١قا=٤هـقا—٨قا

و یاخود:

مج م = (هـ — ٢) ٤ قا ....(٢) اولور .

ایشته (١) و (٢) مساواتندن :

هـ — ٢ = وه — ف

بولوب بورادن :

هـ + ف = وه + ٢ بولنمش اولور .

تنبیه : شو صورت اثبات، ذوکثیر الوجوهك محدب اولمسنه متوقف اولدیغی درکاردر. چونکه عکس تقدیرده شبکه‌نك ذو کثیر الاضلاعلری قسماً درجهٔ انطباقی آشوب اثباتك صحتنی اخلال ایدر .

§ ٢٠) [غ.م.]

دعوای سابقه‌نك محل و وجه استعمالی : ح قدر وجه ایله محاط اولان بر ذو کثیر الوجوهده هروجهك عدد اضلاعی مساوی اولدیغنی و ذوکثیر الوجوه مذکورك هررأسنه ص قدر ضلع مجسمك ملاقی بولندیغنی فرض و بر وجهك عدد اضلاعنی ع ایله ارائه ایده‌لم. بوحالده :

ف = ح ، وه = ح.ع/٢ ، هـ ص = ٢ وه = ح.ع

اولدیغی اشکار اولوب «اویلر» دعواسنه نظراً :

ح ع/ص + ح = ح ع/٢ + ٢ ∴

ص = ٢ ح ع/(ح(٢—ع)+٤) .... (٣) بولنور.

ایمدی درتدن دون وجه‌ایله برشکل ذوکثیر الوجوهك تشکیلی ممکن اولمد



یغندن دائما ح ≥ ٤ اولمق و (٣) مساواتندهکی کسرك قیمتی هر وقت بر عدد تامدن عبارت بولنمق لازم کلدیکی درکار اولمغله :

١): ع = ٣ اولورسه ص= $\frac{٦ ح}{ح+٤}$ ویا ح = $\frac{٤ ص}{٦-ص}$ اولوب(ص)، انجق ٣،٤ و٥ قیمتلری ویریلهبیلهجکندن بوکا نظراً :

یالکز
ص = ٣، ح = ٤، درت وجهلی (ذواربعةالوجوه)
ص = ٤، ح = ٨، سکز وجهلی (ذوثمانیةالوجوه)
ص = ٥، ح = ٢٠، یکرمی وجهلی (ذوعشرینالوجوه)
اشکال مجسمه احداث اولنهبیلور.

٢): ع = ٤ اولورسه(٣) افادهسی : ص = $\frac{٤ ح}{ح+٢}$ ویا ح= $\frac{٢ ص}{ص-٤}$ اولوب (ص)، آنجق ٣ قیمتی ویریلهبیلهجکندن بوکا کوره :

یالکز
ص = ٣
ح = ٦
التی وجهلی
(ذوستة الوجوه)
شکل مجسم وجوده کلیر.

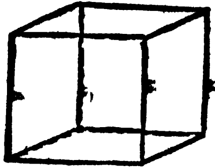
٣): ع = ٥ اولورسه(٣) افادهسی: ص= $\frac{١٠ ح}{٣ح-٤}$ ویا ح = $\frac{٤ص}{١٠-٣ص}$ اولوب (ص) ، ینه آنجق ٣قیمتی ویریلهبیلهجکندن بوکا توفیقا دخی:

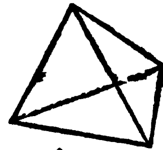
یالکز
ص = ٣
ح = ١٢
اون ایکی وجهلی
(ذواثنی عشرةالوجوه)
شکل مجسم تولد ایلر .

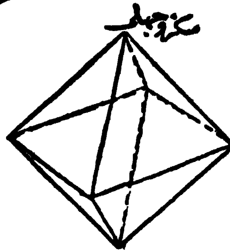
(ع ≥ ٦) اولدقجه (٣) مساواتنك صول طرفنی تشکیل ایدن کسرك صورتی، مخرجندن دائما بیوك اولوب بو حالده ص ایچون بر عدد تام بولمق

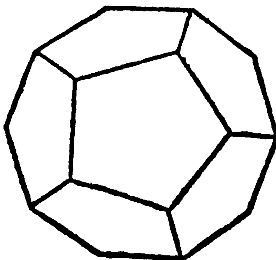
ممکن اولمدیغندن محدب زاویهٔ مجسمه‌لرك رأسلرنده، مساوی عدد اضلاع حاصل ایتمك اوزره، ملاقی اولان محدب و عدد ضلعی مساوی اشکالك احاطه‌سیله تحدث ایدن اجسام ذوکثیرة الوجوه یالکنز بش عددن (درت، سکز، یکرمی، التی و اون ایکی وجهلی) عبارت اوله‌جغی مرتبهٔ ثبوته وارر.

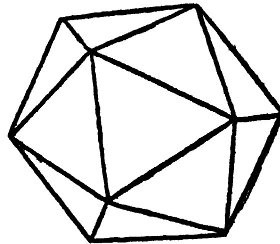
اکر وجوه مذکوره فضله اوله‌رق اشکال منتظمه‌دن ایسه بونلردن متشکل اجسام ذوکثیرة الوجوه دخی منتظم اولورکه مطالعات سابقه‌یه عطفاً











(شکل — ٢٥) یالکنز بش عدد اشکال مجسمهٔ منتظمه‌نك موجود اولدیغنی و مسدس منتظملرك اتحادیله [اوچ زاویه‌سی مجموعی درت قائمه‌یه

مساوی اولمسی سبیله] زاویهٔ مجسمهٔ محدبه‌نك تشکیلی ممکن اولمدیغی وعینی سببدن بشدن زیاده مثلثات منتظمه [مثلثات متساویة الاضلاع] و اوچدن زیاده مخمس منتظم و یا مربع ایله زوایای مجسمهٔ محدبه تشکیل ایدیله‌میه‌جکی اکلاشیلور.

§ ٢٠ (١٠)

وظائف

ا): براهرام و بر منشور مربعی شکلنك مرسماً ارائه‌سی؛

ب): « « مستطیلی وبرمنشورمثلثی « « « «؛

ﺣ): « « وبرمنشورمتوازی‌الاضلاعی « « «؛

د): « « « « « شبه منحرفی « « «؛

ﻫ): « « « « « معینی « « « «؛

و): « « « « « مسدسی « « « «؛

ز): « « « « « مثمنی « « « «؛

ح): بر منشور مخمسیٔ قائم « « « «؛

ط) : برمتوازی المستطیلاتك قطرینك مربعی، ابعاد ثلثه‌سنك مربعلری مجموعنه مساوی‌اولدیغنك ارائه‌سی‌مطلوبدر.

باب ثانی

مبحث منشور

§ (٢١)

قوالیر قاعده‌سی : ایکی موازی مستوی آره‌سنده بولنان ایکی جسمك، کرك اشبو ایکی مستوی ایله وکرك بونلر آره‌سنده بولنان مستویٔ موازیلرله حاصل اولان مقطعلری نظیر نظیره سطحاً مساوی [معادل] اولور ایسه

او ایکی جسم دخی حجماً مساوی [معادل] اولور .

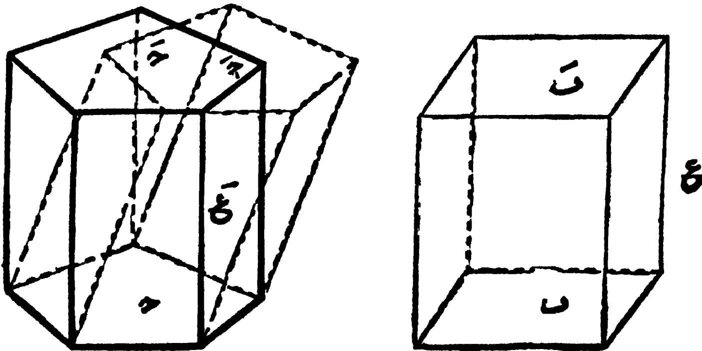
فی الحقیقه هر ایکی جسمده مقطعلرك عددی عینی وبرموجب فرضیات سطحلری نظیر نظیره مساوی اولدیغندن و جسملر انلرك مجموعندن تشکل ایتمش کبی اعتبار اولنه‌بیله‌جکندن حجملری مساوی اوله‌جغی آشکاردر .

§ ۱۰۲۱)

دعاوی

(۱): ارتفاعلری مساوی، قاعده‌لری معادل اولان متوازی‌المستطیلات ایله منشور حجماً مساوی یعنی یکدیکرینه معادل اولور.

اثباتی: (شکل—۲٦) ع، عَ ارتفاعلری یکدیکرینه مساوی اولدیغندن [مذکور متوازی المستطیلات ایله منشور ، موازی ایکی مستوی ایله محدود



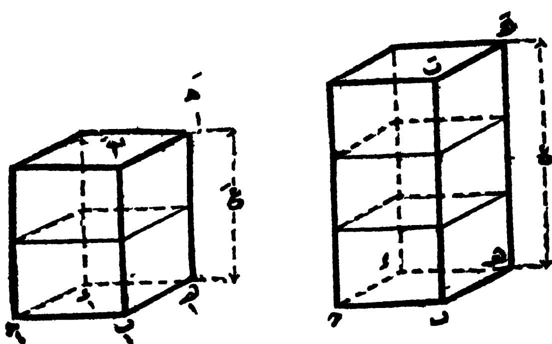
شکل ۲٦

دیمك اولوب اشبو مستویلره موازی مستویلر ایله حاصل اولان مقطعلری دخی (تَ = حَ [بَ = حَ] ؛ ب = ح اولمسی سببیله) دائما معادل اوله‌جغله (قوالیر) قاعده‌سنه نظراً حجماً مساوی اولور.

(۲) : قاعده‌لری مساوی اولان متوازی المستطیلاتلر ارتفاعلریله متناسبدر.

اثباتی: (شکل — ۲۷) مثلا ب ج د ه (= ی)، ب١ ج١ د١ ه١ (= یَ) قاعده‌لری بربرینه مساوی اولان ح، حَ متوازی المستطیلاتلرینك بیننده‌کی حَ/ح نسبتی ه هَ (= ع)، ه١ هَ١ (= عَ) ارتفاعلری بیننده‌کی ع/عَ نسبتنه مساویدر.

اولاً: ع، عَ مشترك المیزان فرض اولنه‌رق قاسم مشترکلری ع ارتفاعنده (مثلا ۳)، عَ ارتفاعنده‌ك (مثلا ۲) دفعه داخل اولسه قاسم مذکور اشبو ارتفاعلر اوزرینه بالتطبیق حاصل اولان تقسیمات نقطه‌



شکل ۲۷

لرندن ی یَ قاعده‌لرینه مستوی موازیلر رسم اولندقده {§ ۱۸ (۸)} و {§ ۲۱} ح، حَ متوازی المستطیلاتلری دخی عینی قسمده مساوی متوازی المستطیلاتلره تقسیم ایدلدیکی جهتله حَ/ح = ن/ك اولور. لکن بر موجب

فرضیات ع/عَ = ن/ك اولدیغندن: حَ/ح = ع/عَ اولمش اولور.

ثانیا: ع، عَ ارتفاعلری غیر مشترك المیزان فرض اولنه‌رق عَ ارتفاعی ن قدر اقسام متساویه‌یه تقسیم و اشبو قسملردن بری ع اوزرینه نقل و توالی ایدلدیکی وقت م دفعه‌دن زیاده، (م+۱) کره‌دن آز تکرر ایدرسه

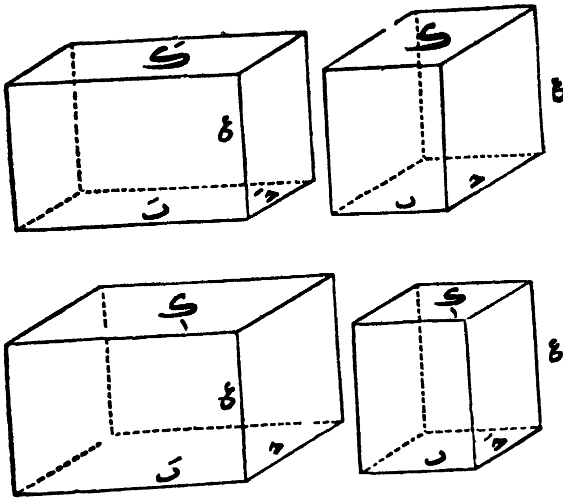
$\frac{\text{ع}'}{\text{ع}} > \frac{\text{م}}{\text{ن}}$ ، $\frac{\text{ع}'}{\text{ع}} < \frac{\text{م}+١}{\text{ن}}$ اولدیغی ظاهردر.

ایمدی تقسیمات نقطه‌لرندن ۓ،ۓ قاعده‌لرینه مستویٔ موازیلر رسم اولندقده ڪَ دخی ن اقسام حجمیهٔ متساویه‌یه تقسیم اولنوب ڪ ایسه اقسام مذکوره‌دن بریسنی م دفعه‌دن زیاده ، (م+١) کره‌دن آزٖ حاوی اولدیغندن $\frac{\text{ك}'}{\text{ك}} > \frac{\text{م}}{\text{ن}}$ ، $\frac{\text{ك}'}{\text{ك}} < \frac{\text{م}+١}{\text{ن}}$ اولور. حالبوکه $\frac{\text{ع}'}{\text{ع}}$ ، $\frac{\text{ك}'}{\text{ك}}$ نسبتلری $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ ، $\frac{\text{م}+١}{\text{ن}}$ حدلری آره‌سنده بولنوب بینلرنده‌کی $\frac{\text{ك}'}{\text{ك}} - \frac{\text{ع}'}{\text{ع}}$ فرقی $\frac{\text{م}+١}{\text{ن}} - \frac{\text{م}}{\text{ن}} = \frac{١}{\text{ن}}$ دن یعنی مفروض اقسامك بریسندن اصغر اولوب ن ایستنلدیکی قدر بیوك اخذ اولنه‌جغندن $\frac{١}{\text{ن}}$ تصور اولنه‌بیلان طوللردن دها کچوك اوله‌جغی وبناءعلیه $\frac{\text{ك}'}{\text{ك}} - \frac{\text{ع}'}{\text{ع}}$ فرقی صفره منجر بولنه‌جغی جهتله $\frac{\text{ك}'}{\text{ك}} = \frac{\text{ع}'}{\text{ع}}$ اولمق لازم کلوب مطلوب ثابت اولور .

تنبیه : به، بب‌َ، بج ایله $\text{به}_{١}$، $\text{بب}'_{١}$، $\text{بج}_{١}$ متوازی المستطیلاتلرك ابعاد ثلثه‌سی اولوب $\text{به} = \text{به}_{١}$، $\text{بج} = \text{بج}_{١}$ فرض اولندیغندن دعوای سابقه « ایکی بعدی مساوی اولان ایکی متوازی المستطیلات اوچنجی بعدلریله متناسبدر » طرزینه دخی ارجاع اولنور .

(٣): ارتفاعلری مساوی اولان متوازی المستطیلاتلر قاعده‌لریله متناسب اولور .

اثباتی : مثلا (شکل — ٢٨) متوازی المستطیلا. تك بری ك : ارتفاعی ع، قاعده سی ے (= ج × ب) دیکری كَ : ارتفاعی ع، قاعده سی ےَ (= جَ × بَ) اولسون.



شکل ٢٨

ارتفاعی ع، قاعده سی ے١ (= ج × بَ، یاخود ب × جَ) اولمق اوزره اوچنجی بر ك١ متوازی المستطیلانی تصور ایده‌لم، اولاً:

ك متوازی المستطیلانك ابعاد ثلثه سی: ع، ب، ج } اولمغله
ك١ « « « « : ع، بَ، ج }

{(٢)، تنبیه} ك / ك١ = ب / بَ ...... (١)

و ثانیاً:

كَ متوازی المستطیلانك ابعاد ثلثه سی: ع، بَ، جَ } اولمغله
ك١ « « « « : ع، بَ، ج }

ینه {(٢)، تنبیه} ك١ / كَ = ج / جَ ...... (٢) اولوب (١) و (٢)

مساواتلری طرفه ضرب ایدلدکده: ك / كَ = ب.ج / بَ.جَ = ے / ےَ اولور.

تنبیه : ک۱ متوازی المستطیلانك ابعاد ثلثه‌سی ع ، ب ، حَ ایکن اثبات دعوی عین وجهله اولور .

(٤) : علی العموم متوازی المستطیلاتلر ابعاد ثلثه‌سنك حاصل ضربلریله متناسبدر .

اثباتی : مثلا بر ک متوازی المستطیلانك ارتفاعی ع ، قاعده‌سی ے (= ب ٠ ح)
دیکر کَ » » » عَ ٠ » ےَ (= بَ ٠ حَ)
اولسون ؛

قاعده‌سی : ک متوازی المستطیلانك ے قاعده‌سنه
ارتفاعی : کَ » » عَ ارتفاعنه } مساوی اولمق
اوزره اوچنجی بر ک۱ متوازی المستطیلاتی تصور ایدلدکده و {(٢)} ه
نظراً ک / ک۱ = ع / عَ و {(٣)} ه کوره ک۱ / کَ = ے / ےَ اولوب طرف طرفه ضرب اولندقده :

ک / کَ = ع ٠ ے / عَ ٠ ےَ = ع ٠ ب ٠ ح / عَ ٠ بَ ٠ حَ بولنور.

§ ٢٢)

دعوی : بر متوازی المستطیلانك مساحهٔ حجمیه‌سی : بر رأسنده ملاقی اولان اوچ ضلع مجسمنك یعنی ابعاد ثلثه‌سنك حاصل ضربنه مساویدر .

اثباتی : ک متوازی المستطیلانك حجمی ، ب ، ح ، ی ابعاد ثلثه‌سنك قیمتلری ؛ و واحد قیاسیٔ طول اوزرنده مرسوم مکعب اولسون {§ ٢١ ، ١٠ ،
(٤)} ک / و = ب ٠ ح ٠ ی / ١×١×١ = ب ٠ ح ٠ ی ∴

ے = (ب ۰ حـ ۰ ء) وه اولوب ک متوازی المستطیلاتی ب . حـ . ء قدر واحد قیاسی حجمی حاوی دیمك اولمغله {§ ۱۸ ، (۱۰)} مذکور متوازی المستطیلاتك مساحهٔ حجمیه‌سی:

ک = ب . حـ . ء . . . . (۱) اولمش اولور.

تنبیه —(۱): (۱) مساواتی ک = (ب ۰ حـ) ۰ ء = ے ۰ ء شکلنه دخی وضع اولنه بیلمکله متوازی المستطیلاتك مساحهٔ حجمیه‌سی ارتفاعنك ، قاعده‌سی سطحنه حاصل ضربنه دخی مساوی اولدیغی آکلاشیلور.

(۲) : مکعبده ب = حـ = ء اوله‌جغندن مساحهٔ حجمیه‌سی :

ک = ب^۳ . . . . . . (۲) اولور .

§ ۲۳)

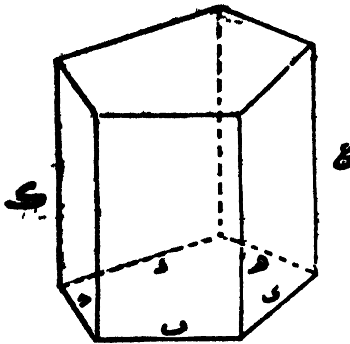
دعوی : قاعده‌سی ے ، ارتفاعی ع اولان کیف ما اتفق بر منشورك ک مساحهٔ حجمیه‌سی کذلك ارتفاعنك قاعده‌سنه حاصل ضربنه مساویدر.

اثباتی : ارتفاعلری مساوی ، قاعده‌لری معادل اولان منشور ایله متوازی المستطیلات {§۲۱، ۱، (۱)} حجماً مساوی اولمغله :

ک = ع . ے . . . . (۳) اولمق لازم کلیر.

§ ۲۳، ۱)

دعوی : بر منشور قائمه وجهلرینك مساحهٔ سطحیه‌سی مجموعی : ارتفاع منشورك، قاعده‌سی محیطنه حاصل ضربنه مساویدر.



شکل ۲۹

اثباتی: (شکل—۲۹) ده منشور قائمك قاعده‌سنك ضلعلری ب، ح، د، ه، ی؛ ارتفاعی ع اولسون. منشور، قائم فرض اولندیغندن وجهلری مستطیل الشکل اولمغله مساحهٔ سطحیه‌لری: ع.ب، ع.ح، ع.د، ع.ه، ع.ی اولوب جمع ایدلدکده منشورك وجهلرینك مساحهٔ سطحیه‌سی اوله‌جغی آشکاردر. بناءً علیه مساحهٔ سطحیهٔ مذکوره‌یی (مج ح) ایله کوستریرسه‌ك:

مج حَ = ع ب + ع ح + ع د + ع ه + ع ی =
ع (ب+ح+د+ه+ی) بولنور.

حالبوکه معترضه درونده بولنان مقادیر منشورك قاعده‌سی اولان ذوکثیر الاضلاعك محیطندن عبارت اولمغله (مج ب) ایله ارائه اولنورسه:

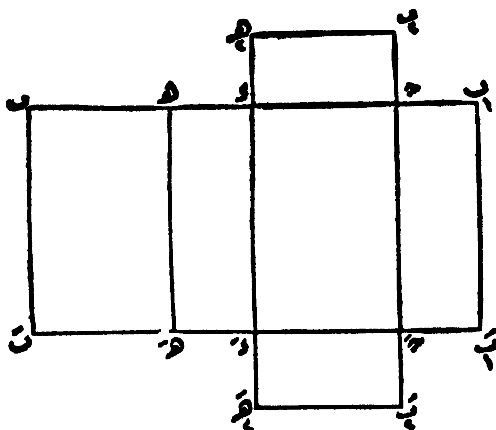
مج ح = ع . مج ب . . . . (٤) اولمش اولور.

تنبیه: منشور قائمك قاعده‌لری ل، لَ فرض اولنورسه هر ایکیسی یربرینه مساوی اولدیغندن منشور مذکورك سطح خارجیسی = ع مج ب + ۲ ل . . . . (٥) اولور.

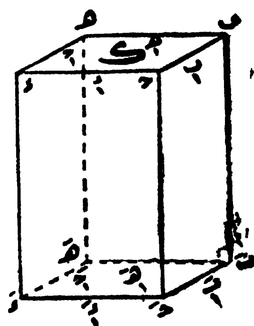
§ ۲۳، ب)

تعریف: بر شکل مجسمك انکشافی شکل خارجیسنه مساوی بر شکل مستوی رسم ایتمك دیمکدر. بو حالده مثلا بر منشور قائمك انکشافی وجهلرینك مساحهٔ سطحیه‌سنه مساوی رسم اولنان مستطیله اوست و آلت قاعده‌لرینك دخی انضمامیله استحصال اولنور.

بالترسیم بر شکل مجسمك، هر قنغی بر وجهنك مستویسی اوزرینه انکشافی ایچون مذکور وجهی تحدید ایدن ضلع مجسملر محور اعتباریله دیکر وجهلری و قاعده‌لری دور ایتدیره‌رك وجه مفروضك بولندیغی مستوی‌یه تطبیق ایتدیرمکله اولور. بو حالده مثلا (شکل—٣٠) ك متوازی المستطیلاتك انکشافی (شکل—٣١) ایله و (شکل—٣٢) ك اهرام مربعینك انکشافی (شکل—٣٣) ایله کوستریلندن عبارتدر.



شکل ٣١



شکل ٣٠

تنبیه (١): منشور قائمك انکشافنده اوست و آلت قاعده‌لرك محیطلری، یکدیکرینه موازی بر مستقیم تولید ایتدیکی و کیف ما اتفق منشورلرك انکشافلرنده مذکور محیطلر، قسملری بر برینه موازی اولان بر رخط منکسر حاصل ایلدیکی آشکاردر.

(٢): (شکل—٣١) مثللو قالین بر کاغد و یا مقوا کسیلوب ججَ، دَدَ، ههَ، ءءَ، جَءَ استقامتنده قیرلدقدن صوکره قپادیلورسه (٣٠) نجی شکل حاصل اولور. بو حالده قابل انکشاف اولان هر شکل مجسم قالین کاغد و یا مقوا ایله بالسهوله تشکیل ایدیله‌بیله‌جکی ا کلاشیلور.

(٣): (شكل — ٣١) { ب ح = ب ح ٢ = ه د = ه و ٢ ، ب ح = ب ٢ ح = ه د ٢ = ه ٢ د ٢ } اولوب

(شكل — ٣٠) ده: ب ح = ب ١ ح ١ ، ب ه = ب ١ ه ١ ... ب ه = ب ١ ه ١ اولوب كذلك (شكل — ٣٠) ده د ه = د ١ ه ١ ...

اولديغى و (شكل — ٣١) ب ب ٢ = ح ح ٢ = ... الخ قسم مستقيملرى متوازى المستطيلاتك ارتفاعلرندن عبارت بولنديغى كورلمكده‌در. بناءعليه؛ هر قنغى بر منشور قائمك انكشافى ايچون:

اولاً — بينلرنده‌كى بعدار تفاع منشوره مساوى ايكى مستقيم موازى،
ثانياً — هر قنغى بر نقطه‌دن بر عمود مشترك } رسم ايديلمك

ثالثا — عمود مشتركك موقعلرندن اعتباراً منشورك قاعده‌لرينك ضلعلرينه مساوى، موازيلر اوزرنده صره ايله قسم مستقيملر اخذ،
رابعاً — متناظر نقطه‌لرك بينلرى وصل } اولنمق،

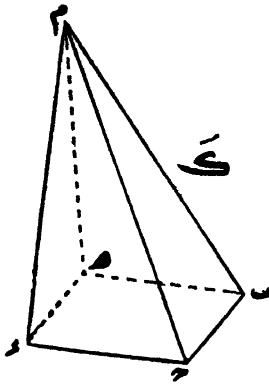
خامساً — انكشاف هانكى وجهك مستويسنده‌ياپيليورسه انك ضلع فوقانى و تحتانيسى اوزرنده، اوجه‌اخذ ايديلمش اولان قسم مستقيملرك صره‌سنى نظر مطالعه‌يه آله‌رق، منشورك قاعده‌لرينه مساوى شكللر وجوده } كتيريلمك

كفايت ايدر.

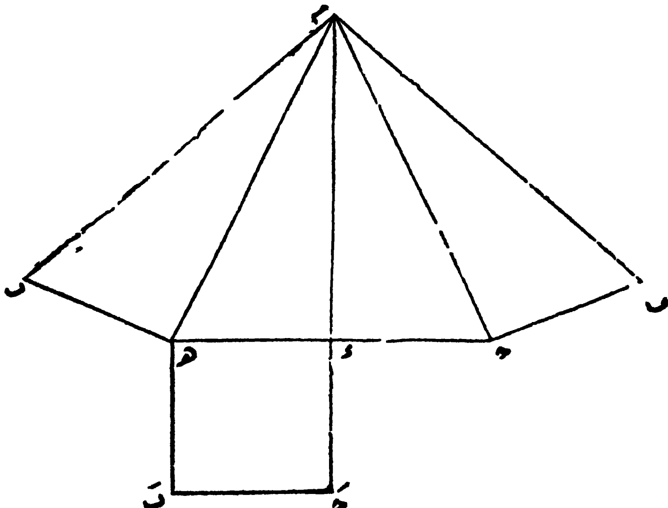
§ ٢٣ — (ح)

وظائف

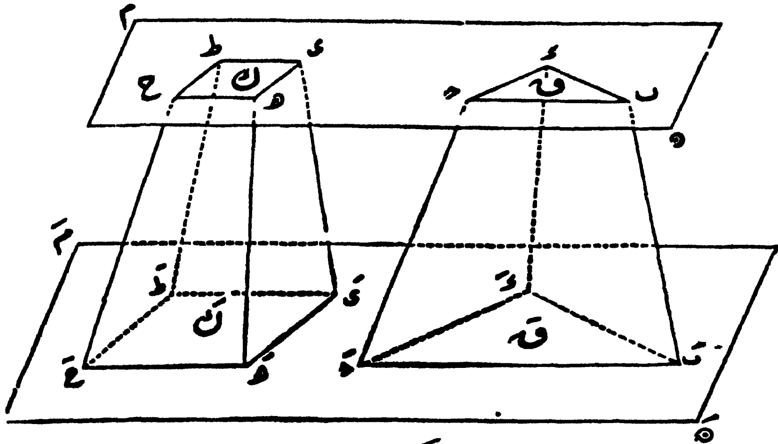
١) : (شكل — ٣٤) يكديكرينه موازى (م ه). (م ه) مستويلرينى تصور


شكل ٣٢

ايده‌لم . (م ه) مستويسى اوزرنده
ب د ج = ه ح ط ى ، (هـ = ك) رسم ،
ب د ، ب ج ، ج د ايله ه ح ، ح ط ، ط ى ، ى ه
مستقيملرندن (مَ هَ) مستويسى داخلنده
هـ/هـَ = ك/كَ اولمق اوزره : هَ (= بَ جَ دَ) ،
كَ (= هَ حَ طَ ىَ) شكللرينى حاصل ايدن (ب د) ،
(د ج) ، (ج ب) ايله (ه ى) ، (ى ط) ، (ط ح) ،
(ح ه) مستويلرينى امرار ايليه‌لم . اشبو مستويلر
واسطه‌سيله تشكل ايدن ك ، كَ جسملرينك يكديكرينه
معادل اولديغنك ؛

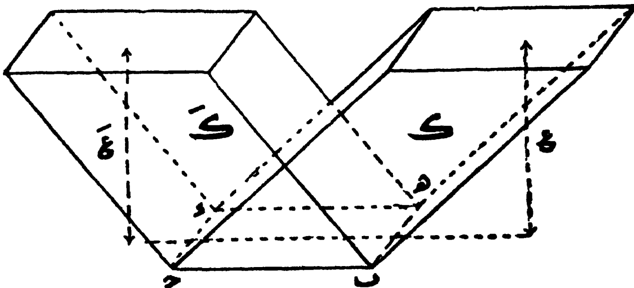

شكل ٣٣

ب) : (شكل ـــ ٣٥) قاعدهٔ تحتانیلری [ب ج د هـ] مشترك و عَ،ع ارتفاعلری مساوی اولان كَ ، كَ منشورلری معادل بولندیغنك ارائه‌سی ؛



شكل ٣٤

ج) : قاعده‌لری مثلث متساوی الاضلاعدن عبارت اولان بر منشور قائمك اولاً : بر قاعده‌سی ، ثانیاً : بر وجهی اوزرینه انكشافی ؛



شكل ٣٥

د): قاعده‌لری مسدس منتظمدن عبارت اولان برمنشور قائمك اولاً :

بر قاعده‌سی ، ثانیاً: بر وجهی اوزرینه انکشافی مطلوبدر .

هـ) : قالین کاغد ایله ویا مقوا ایله :

اولاً — برمنشور مثلثی قائم { قاعده‌سنك ضلعلری { ب = ٤ سم(*) ، ح = ٦ سم ، ء = ٨ سم } ؛ قاعده‌سی ع = ١٠ سم }

ثانیاً — « « « { قاعده‌سی مثلث متساوی الاضلاع ؛ ارتفاعی ، قاعده‌سنك برضلعنه مساوی }

ثالثاً — بروجهنك مساحهٔ سطحیه‌سی ٢٥ سم^٢ اولان بر مکعب

رابعاً — برمنشور متوازی المستطیلات { قاعده‌سنك ضلعلری { ب = ٨ سم ، ح = ٢ سم } ؛ ارتفاعی ع = ١٠ سم }

خامساً — برمنشور مخمسی منتظم قائم { قاعده‌سنك برضلعی = ٣ سم ؛ ارتفاعی = ١٢ سم }

سادساً — ارتفاعی قاعده‌سنك برضلعنه مساوی اولان برمنشور مسدسی منتظم قائم تشکیل ایلمك مطلوبدر .

و) : ابعاد ثلثه‌سی ١٥ ، ٩ ، ٦ م اولان برمنشورك یکرمی یدیده برینه مساوی دیکر برمنشورك ،

اولاً — قاعده‌سی مستطیلی ،
ثانیاً — « مربعی ،
ثالثاً — « مثلث متساوی الاضلاعی ،
رابعاً — « مسدس منتظمی ،
خامساً — ابعاد ثلثه‌سی یکدیکرینه مساوی

} اولدیغنه نظراً ابعادی نه اوله بیله جکنك ارائه‌سی مطلوبدر .

(*) {هـ . § ٣٧ ، ف ٧٠} یه باقلسون.

مسائل

١): بر مكعبك، قطرينك ضلع مجسمی [= ٣٠٢ م] جنسندن قيمتی بولمق ؛

٢): ٥٢٥ م٣ حجمنده متوازی المستطيلات شكلنده بر اودون ييغيننك عرضی ٧ م، طولی ٢٠٥ م اولديغی معلوم ايكن ارتفاعنك قاچ مترهيه مساوی اولديغنی حساب ايتمك مطلوبدر .

٣): ابعاد ثلثه‌سی ب = ٣ م ؛ ح = ٥٠١٢ م ؛ ع = ٨٠٠٥ م اولان بر منشور متوازی الاضلاعينك مساحهٔ حجميه‌سی ؛

٤): اضلاع ثلثه‌سی ب = ٢٠١٥م؛ ح = ٠،٠٢٥ م ؛ د = ١٠٠٣ م اولان بر متوازی المستطيلاتك مساحهٔ حجميه‌سی مطلوبدر .

٥): متوازی المستطيلات شكلنده طولی = ٦٠٥٠ م؛ عرضی = ٢٠٧٥م ؛ ارتفاعی = ٣ م اولان بر ييغين اودون صاتون آلمق ايستيورز . بر متره مكعبی اودونك فيئاتی ١/٤ ٢ مجيديه اولورسه مذكور ييغنه قاچ مجيديه ويرمكه مجبورز ؟

٦): متوازی المستطيلات شكلنده . ابعاد ثلثه‌سی ب = ١٠م؛ ح = ٤م؛ د = ١،٢٥ م اولان بر ييغين قومه مكعب شكلی ويرلديكی تقديرده ارتفاعی قاچ متره اولور ؟

٧): قطری ٥ م طولنده اولان بر مكعبك مساحهٔ حجميه‌سنی حساب ايتمك مطلوبدر .

٨): ١٠ م ارتفاعنده، منشور مثلثی متساوی الاضلاع شكلنده بر آنباره

قاعده‌سنك برضلعی ٧م ایسه قاچ کیله [اعشاری] آرپه‌قونیله‌بیلور؟

٩): ٨م ارتفاعنده، ٩٨ م٣ حجمنده بولنان برمنشورمربعینك قاعده‌سنك بر ضلعی قاچ متره اولور؟

١٠): ٥،٥ م عمقنده برحوضك قاعده‌سی، هرضلعی ٣ م اولان، مسدس منتظم شکلنده‌در، ثانیه‌ده ٢دم٢ صواجرا ایدن برموصلق نقدر زمان ظرفنده مذکور حوضی املا ایدر؟

١١): برینك ضلع مجسمی ٣، دیکرینك ٤ و اوچنجیسنك ٥ متره اولان اوچ مکعبك مساحهٔ حجمیه‌لری مجموعنه مساوی دردنجی بر مکعبك ضلعی قاچ متره اولور؟

١٢): برمنشور مربعینك قاعده‌سنك بر ضلعی ٣،١٥ م اولوب ارتفاعی ضلع مذکورك اوچ مثلنه مساوی اولدیغی معلوم ایکن منشور مذکورك سطح خارجیسنی بولمق،

١٣): سطح خارجیسی ٤٦ ٢٦٠ م٢ اولان برمکعبك مساحهٔ حجمیه‌سنی حساب ایتمك،

١٤): طولی=٤ م، عرضی=٣م اولان وارتفاعی قاعده‌سنك قطرینه مساوی بولنان برمتوازی‌المستطیلاتك مساحهٔ حجمیه‌سنی حساب ایتمك،

١٥): قاعده‌سنك، محیطی التی متره‌یه مساوی اولان بر مسدس منتظمدن وارتفاعی برمتره‌دن عبارت اولان

برمنشورقائمك: { اولاً ــ سطوح جانبیه‌سنك مساحهٔ سطحیه‌لری مجموعنی، ثانیاً ــ سطح خارجیسنك مساحهٔ سطحیه‌سنی، ثالثاً ــ مساحهٔ حجمیه‌سنی، } حساب ایتمك،

١٦): برمنشور مثلثی قائمك قاعده‌سی مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه اولوب اشبو قاعده‌نك وترقائمه‌سی=٣،٢٥م، منشورك ارتفاعی=٦،٢٥م

اولدیغی حالده منشورك مجموع اضلاعنك طولنی حساب ایتمك مطلوبدر.

۱۷): منشور مربعی قائم شکلنده براوطه نك عرضی ویا طولی =۸ م ،
ارتفاعی =۴،۴۰ م اولوب بالجمله اضلاعنه التون یالدیزلی باقیرچبوقلر
قونیلمق ایستنیور . مذکور چبوقلرك بر متره طولی ۲۰۸۷۵،۵
غروشه اولدیغی حالده مجیدیه ۱۹ غروش حسابیله ، قاچ مجیدیه
تأدیه ایتمك لازمدر ؟

۱۸): منشور مخمسی منتظم شکلنده انشا ایدلمش اولان بر حوضك قاعده
سنك بر ضلعی = $\frac{1}{2}$ م ، عمقی = $\frac{3}{4}$ ۱م اولورسه قاچ لیتره صو آلیر؟

۱۹): $\frac{1}{2}$ ۳ م ارتفاعنده منشور مثلثی متساوی الاضلاع شکلنده قور -
شوندن بر صو خزینه سی انشا اولنمق ایستنلیور. منشورك قاعده سی اولان
مثلثك بر ضلعی ایکی متره در. قورشونجی جناح سطحلرینك بهر متره
مربعی ایچون ۱۰۰ غروش وقاعده سطحلرینك بهر متره مربعی ایچون
$\frac{1}{2}$ ۱۲۴ غروش طلب ایتدیکی حالده :

اولاً — مصرف کاملی ،
ثانیاً — منشورك سطح خارجیسنه معادل بر مربعك ضلعی ،
ثالثاً — محیطی منشورك اضلاع مجسمه سی طوللرینك مجموعنه مساوی
اولان بر مربعك مساحهٔ سطحیه سی نقدر اولور؟

۲۰): کسمه بر طاشك ایکی وجهی هم مساوی ، هم موازی اولوب
یکدیکرندن ۰،۴۸ م بعدنده در .

مذکور ایکی وجه: { ارتفاعی = ۰،۷۰ م ؛ قاعدهٔ فوقانیسی = ۱،۳۷ م ؛ « تحتانیسی = ۱،۶۱ م } اولان شبه

منحرفدن عبارت اولدیغی وضلعلری نظیر نظیره موازی بولندیغی حالده :
اولاً — طاشك نه شکلده اولدیغی ؛ ثانیاً — دسیمتره مکعبی جنسندن حجمی مطلوبدر !

+ ۲۱): قاعده‌سنك نصف قطر تشعیعی = $\sqrt{3}$ م اولان وارتفاعی ۱۰۷۶ متره‌دن عبارت بولنان قائم برمنشور مسدسی منتظمك اولاً — سطح خارجیسنی، ثانیاً — برمتره مربعنه جلاجرتی ۱۰ غروش اولدیغی حالده‌قاچ غروش‌ویریلمك لازم کلدیکنی حساب ایتمك ،

+ ۲۲): برمنشورمربعنك حجمی = ۳۲ م^3 ، قاعده‌سنك قطری = ۱۰٤۱م اولدیغی معلوم بولندیغی حالده‌منشور مذکورك ارتفاعیله قاعده‌سنك ضلعنی بولمق ،

۲۳): برمنشورمربعی قائمك ارتفاعی قاعده‌سی ضلعنك اوچ مثلنه وحجمی سکسان بردسمتره مکعبنه مساوی اولدیغی معلوم ایکن ابعادثلثه‌سنی حساب ایتمك،

۲٤): حجمی(۲دم^3)نه مساوی اولمق اوزره برمکعب اعمال ایلمك،

۲۵): حجمی(۱۰۰م^3)نه مساوی اولان برمکعبك سطح خارجیسنی حساب ایتمك مطلوبدر .

باب ثالث

مبحث اهرام

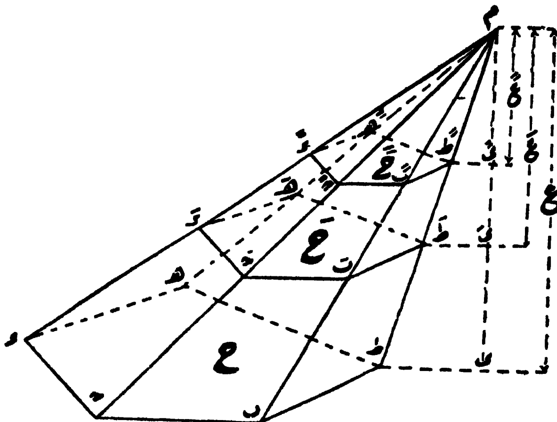
(٢٤ §

دعوی : بر اهرامك قاعده‌سنه موازی رسم اولنان مستویلرك اهرام مذکورك سطوح جناحیه‌سیله حاصل ایتدیکی مقطعلر ، بونلره عائد ارتفاعلرك مربعلریله متناسبدر .

مثلا (شکل — ٣٦) م(ب ج د ه ط) اهرامنك ب ج د ه ط (=ح) قاعده‌
سنه موازی رسم اولنان، فرضا ایکی مستوینك حاصل ایتدیکی بَ جَ دَ هَ طَ
(=حَ) ، بً جً دً هً طً (=حً) مقطعلری ییننده‌کی $\frac{حَ}{حً}$ نسبتی بونلره عائد
اولان عَ ، عً ارتفاعلرینك مربعلری ییننده‌کی $\frac{عَ^{2}}{عً^{2}}$ نسبتنه مساوی یعنی

$$\frac{حَ}{حً}=\frac{عَ^{2}}{عً^{2}}$$ در.

اثباتی : { § ١٢ ، ١ ، (٨) } بَ جَ || بً جً || ب ج اولمغله {ه ، § ٧٧ ،



شکل ٣٦

(٣)} م بَ جَ ∽ م بً جً ∽ م ب ج اولوب {ه ، § ٧٤ ، (ب)} $\frac{بَ جَ}{ب ج}$ — $\frac{م جَ}{م ج}$

وعینی سببدن طولایی $\frac{\text{جَدَ}}{\text{جِدِ}}=\frac{\text{مجَ}}{\text{مجِ}}$ اولدیغی جهتله $\frac{\text{بَجَ}}{\text{بِجِ}}=\frac{\text{جَدَ}}{\text{جِدِ}}$ و اشبو اصول تعقیب ایدیله‌رك :

$$\frac{\text{جَدَ}}{\text{جِدِ}}=\frac{\text{دَهَ}}{\text{دِهِ}}=\frac{\text{هَطَ}}{\text{هِطِ}}=\frac{\text{طَبَ}}{\text{طِبِ}}=\frac{\text{بَجَ}}{\text{بِجِ}}$$ بولنور .

ایشته بَجَدَهَطَ ، بِجِدِهِطِ ذو کثیر الاضلاعلرینك ضلعلری نظیر نظیره موازی و متناسب اولدیغندن {§ ۱۰ و ه . § ۷۷ · (۲)} مذکور شکللرك مشابه اولمسی حسبیله {ه . § ۱۰۷} $\frac{\text{حَ}}{\text{حِ}}=\frac{(\text{بَجَ})^{۲}}{(\text{بِجِ})^{۲}}$ ..... (۱) ؛

م ی عمودیله مثلا م ط ضلع مجسمندن کچن مستوینك حَ ، حِ مقطعلریله حاصل ایتدیکی یَطَ ، یِطِ فصل مشترکلری دخی (ی ط) یه موازی اولدیغندن $\frac{\text{مَیَ}}{\text{مِیِ}}=\frac{\text{مَطَ}}{\text{مِطِ}}$ و ذاتاً $\frac{\text{بَجَ}}{\text{بِجِ}}=\frac{\text{مَطَ}}{\text{مِطِ}}$ اولمغله $\frac{\text{بَجَ}}{\text{بِجِ}}=\frac{\text{مَیَ}}{\text{مِیِ}}=\frac{\text{عَ}}{\text{عِ}}$ ∴

$$\frac{(\text{بَجَ})^{۲}}{(\text{بِجِ})^{۲}}=\frac{\text{عَ}^{۲}}{\text{عِ}^{۲}}$$ ..... (۲) اولور .

ایمدی برر طرفی مساوی اولان (۱) و (۲) مساواتنك طرف ثانیلری دخی مساوی اوله‌جغندن $\frac{\text{حَ}}{\text{حِ}}=\frac{\text{عَ}^{۲}}{\text{عِ}^{۲}}$ اولمش اولور.

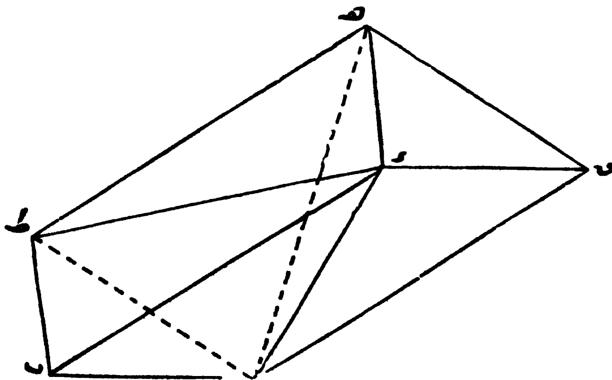
تنبيه —(١): بوندن اكلاشيلوركه مساوى ويامعادل قاعده ومساوى ارتفاعده بولنان ايكى اهرامك، قاعده‌لرينه موازى و بو قاعده‌لردن بعدلرى مساوى اولان مستويلرله مقطعلرى يكديكرينه مساوى ويامعادل اوله‌جغندن {§ ٢١} مذكور ايكى اهرامك حجملرى دخى معادل اولور .

(٢) : بالاده استخراج اولنان (١) مساواتنه قياساً $\frac{\text{ح}}{\text{ح}'} = \frac{(\text{ب ح})^2}{(\text{ب}'\text{ح})^2}$

بولنوب {ح. § ١١، ١٠} $\frac{\text{ح}'}{(\text{ب}'\text{ح}')^2} = \frac{\text{ح}''}{(\text{ب}''\text{ح}'')^2}$ ، $\frac{\text{ح}}{(\text{ب ح})^2} = \frac{\text{ح}'}{(\text{ب}'\text{ح}')^2}$ و بناء عليه :

$\frac{\text{ح}}{(\text{ب ح})^2} = \frac{\text{ح}'}{(\text{ب}'\text{ح}')^2} = \frac{\text{ح}''}{(\text{ب}''\text{ح}'')^2}$ و ياخود {ح. § ١١ ، ١٠}

$\frac{(\text{ب ح})^2}{\text{ح}} = \frac{(\text{ب}'\text{ح}')^2}{\text{ح}'} = \frac{(\text{ب}''\text{ح}'')^2}{\text{ح}''}$ اولمش اولور .



شكل ٣٧

دعوی : بر اهرامك مساحهٔ حجمیه‌سی ارتفاعنك قاعده‌سی سطحنه حاصل ضربنك ثلثنه مساویدر.

اثباتی : (شکل-٣٧)(ط ب ح ی ﻫ ن) ایله ارائه اولنان منشورمثلثی ط ح ی، ح ی ﻫ مستویلرله قطع اولندقده: ی (ط ب ح)، ح (ی ﻫ ن)، ی (ط ح ﻫ) ایله ارائه اولنان اوچ اهرام مثلثی حاصل اولورکه برنجینك و ایکنجینك ط ب ح، ی ﻫ ن قاعده‌لری و[ی، ح رأسلری قاعده‌لرینه موازی مستویلر اوزرنده بولنمسی حسبیله] ارتفاعلری بربرینه مساوی اولدیغندن {§ ٢٤، تنبیه} یکدیکرینه معادل اولدیغی کبی [اهرام مثلثیده هر قنغی بروجه قاعده اعتبار اولنه‌بیله‌جکندن] ایکنجی واوچنجی اهرامك ﻫ ح ن ، ط ح ﻫ قاعده‌لری مساوی و [رأسلری مشترك اولدیغندن] هر ایکیسنك ارتفاعی عینی اولمغله بونلر دخی بربرینه و بو سببدن هر اوچی یکدیکرینه معادل اولوب هر بری عینی قاعده و ارتفاعده بولنان منشورك ثلثندن عبارت بولندیغی و بناء علیه {§ ٢٤ ، تنبیه} نظر مطالعه‌یه آلنه‌رق کیف ما اتفق بر اهرامك ارتفاعی = ع ، قاعده‌سی = ے ، مساحهٔ حجمیه‌سی = ک ایله کوستر یلورسه: ک = $\frac{1}{3}$ ع . ے . . . . (٦)
اولدیغی اکلاشیامش اولور .

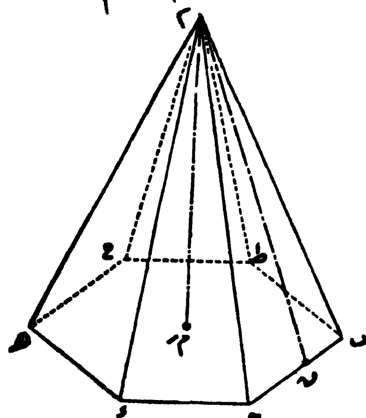
تنبیه : ارتفاعی عَ، قاعده‌سی ےَ اولان ایکنجی بر اهرامك مساحهٔ حجمیه‌سی کَ = $\frac{1}{3}$ عَ . ےَ اولوب (٦) مساواتیله طرف طرفه تقسیم اولنورسه $\frac{ک}{کَ} = \frac{ع . ے}{عَ . ےَ}$ بولنوب ع = عَ حالنده $\frac{ک}{کَ} = \frac{ے}{ےَ}$ ، ے = ےَ حالنده $\frac{ک}{کَ} = \frac{ع}{عَ}$ اولمغله ارتفاعلری مساوی اولان اهراملر قاعده‌لریله

و قاعده‌لری مساوی اولانلر ارتفاعلریله متناسب اولدیغی اکلاشیلمش اولور.

§ ۱۰۲۵)

دعوی: قاعده‌سی شکل منتظمدن عبارت اولوب رأسی قاعده‌سنك مرکزندن اقامه اولنان عمود اوزرنده بولنان اهرامه «اهرام منتظم» دنیلوب یان وجهلری مجموعی رأسندن قاعده‌سنك ضلعلرندن برینه تنزیل اولنان عمودك، مذکور قاعده‌نك مجموع اضلاعنه [محیطنه] حاصل ضربنه مساویدر.

[(شکل — ۳۸) اهرام مسدسی منتظمی ارائه ایدوب (م مَ) ارتفاعی و (م ه) ، م رأسندن ب ج ضلعنه تنزیل اولنان عموددر]



شکل ۳۸

اثباتی: اهرام مذکورك یان وجهلری بربرینه مساوی مثلث متساوی‌الساقینلرندن عبارت اولوب عددی قاعده‌نك عدد اضلاعی قدردر. بناء علیه برینك مساحهٔ سطحیه‌سی قاعده‌نك عدد اضلاعنه ضرب اولنورسه جمله‌سنك مساحهٔ سطحیه‌سی بولنور. بو حالده رأسدن قاعده‌نك ضلعلرندن برینه تنزیل اولنان عمودك طولی = م، ضلع مذکورك طولی = ب، عدد اضلاع = ﻫ، یان وجوهنك سطحلری مجموعی = مج ح اولسه:

مجح = $\frac{1}{3}$ م . ب . ﻫ .... (٧)

اولمش اولور .

تنبيه : اهرامك قاعده‌سی (ل) ايله كوستريلورسه:

اهرامك سطح خارجيسی = $\frac{1}{2}$ م . ب . ﻫ + ل..... (٨)

اولور .

(§ ٢٥.ب)

وظائف

ا) : عينی بر قاعده‌يه ومساوی مساحهٔ حجميه‌يه مالك اولان باجمله اهراملرك رأسلرينك محل هندسيسی نه اولديغنك ،

ب) : برمكعبك وجهلرندن هر قنغی بريسنك مركز شكليله‌بونك‌مقابلنده بولنان وجهك ضلعلرينك‌هرنقطه‌سی بيننه وصل اولنان‌مستقيملر واسطه‌سيله نصل برشكل حاصل اولديغنك و بو شكلك مساحهٔ حجميه‌سی ووجهلرينك مساحهٔ سطحيه‌لری مجموعی نيه مساوی بولديغنك ،

ح) : براهرامك، ضلع مجسملرندن بريسنك منتصف نقطه‌سندن‌كچمك اوزره، قاعده‌سنه موازاتاً مرسوم مستوی ايله تشكل ايدن كچوك بر اهرامك حجمی اهرام معلوم حجمنك درتده برينه مساوی اولديغنك ،

ء) : ارتفاعی‌قاعده‌سنك قطرينه مساوی اولان اهرام مربعينك مساحهٔ حجميه‌سی نيه مساوی اولديغنك ،

ﻫ) : ارتفاعی قاعده‌سنك برضلعنه مساوی اولان اهرام مثلثیٔ متساوی الاضلاعك مساحهٔ حجميه‌سی نيه مساوی اولديغنك ارائه‌سی مطلوبدر.

§ ٢٥٠ - ج)

مسائل

+ ١) : براهرام منتظم مثلثینك یان ضلع مجسملری ٠،٠٦٥م وقاعده‌سی اولان مثلث متساوی الاضلاعك ضلعی ٠،٠٤ م اولدیغی معلوم ایكن اهرام مذكورك مساحهٔ حجمیه‌سنی و سطح خارجیسنك مساحهٔ سطحیه‌سنی حساب ایتمك ؛

٢) : قالین كاغد ایله ویا مقوا ایله :

اولاً — براهرام منتظم مثلثی {قاعده‌سنك برضلعی=٥سم / یان ضلع مجسمی كذا =٥سم}

ثانیاً — براهرام‌منتظم‌مربعی {قاعده‌سنك مساحه‌سی =٣٦سم٢ / ارتفاعی =٠،٠٠٤م}

ثالثاً — براهرام‌منتظم‌مخمسی {قاعده‌سنك نصف قطرقائمی =٣ سم / یان ضلع مجسملرندن بری =٦ سم}

تشكیل ایلمك ؛

٣) : ارتفاعی ٥،٢٥ م و قاعده‌سنك قطری ٣،٦٠م اولان براهرام مربعینك مساحهٔ حجمیه‌سنی بولمق مطلوبدر.

+ ٤) : قاعده‌سنك بر ضلعی ٢،٠٤ م ویان وجهلرندن بریسنك ارتفاعی ٨،٥٠ م اولان بر اهرام منتظم مربعینك یان وجهلرینك‌مساحهٔ سطحیه‌لری مجموعنی واهرامك مساحهٔ حجمیه‌سنی بولمق ؛

٥) : قاعده‌سنك بر ضلعی ١٢ سم ، یان ضلع مجسملرندن بری ٠،١٥ م اولان بر اهرامك حجمیله یان وجهلرینك سطحنی حساب ایتمك؛

+ ٦) : ضلعی ١٫١٥ م اولان بر مکعب ایله بونك بر وجهی قاعده اتخاذ اولنمق اوزره ١ متره ارتفاعنده بر اهرام منتظم مربعیدن متشکل بر طاشك مساحهٔ حجمیه‌سنی و یان وجهلرینك مساحهٔ سطحیه‌لری مجموعنی بولمق؛

+ ٧) : براهرام منتظم مثلثینك قاعده‌سی محیطی ١٫٥ دم و یان وجهلرندن بریسنك ارتفاعی ١٤٫٨ م اولدیغی حالده اهرامك مساحهٔ حجمیه‌سنی و سطح خارجیسنی بولمق ؛

+ ٨) : قاعده‌سنك ضلعی ١٫٥ سم و یان ضلع مجسمی ٢٫٢ سم اولان بر اهرام منتظم مثلثینك یان وجهلرندن بریسنك مستویسی اوزرنده انکشافنی رسم ایتمك وسطح خارجیسی ایله حجمنی بولمق ؛

+ ٩) : قاعده‌سنك ضلعی بر دسمتره و یان اضلاع مجسمه‌سندن هربری ١٫٥ دم اولان براهرام منتظم مربعینك قاعده‌سنك مستویسی اوزرنده انکشافنی رسم ایتمك مطلوبدر .

+ ١٠) : اهرام منتظم مربعی شکلنده غرانیتدن معمول بر دیکیلی طاشك ثقلتنی حساب ایتمك، (قاعده‌سنك برضلعی = ٢٫٢٠ م ، ارتفاعی = ٢٢٫٨٩ م اولدیغنه و غرانیتك بردسمتره مکعبی مقدارینك ثقلتی ٤٫٣٧٠ کیلوغرام بولندیغنه نظراً)

+ ١١) : ارتفاعی سکز متره‌یه مساوی اولان بر اهرام مربعی ایله اون متره ضلعنده بولنان برمکعب معادل اولدیغی حالده قاعدهٔ اهرام اولان مربعك بر ضلعنك طولنی حساب ایتمك ؛

+ ١٢) : بر اهرام مستطیلینك ارتفاعی ٠٫٤٠ و قاعده‌سنك بر ضلعی ١٫٢ و دیکری ٠٫٨ م اولوب اشبو اهرامك قاعده‌سنه موازی اولمق و ارتفاعك منتصف نقطه‌سندن مرور ایتمك اوزره بر

مستوی ایله قطع ایدلدیکی حالده حصوله کلن کچوك اهرامك مساحهٔ حجمیه‌سنی و یان وجهلرینك مساحهٔ سطحیه‌لری مجموعنی حساب ایتمك مطلوبدر .

باب رابع

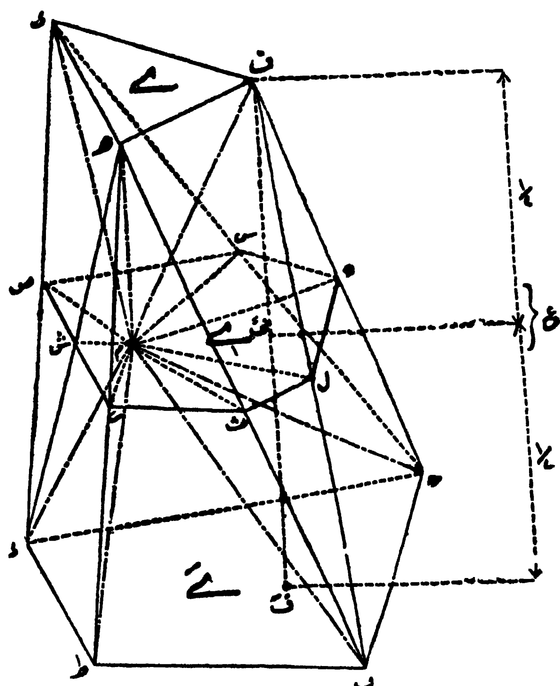
مبحث اجسام ناقصه

§ ۲٦)

تعریف : (شکل —۳۹) ده اولدیغی مثللو ه، ف، ی، ب، ج، د، ط رأسلری ے، ے مستویین متوازیینی اوزرنده بولنان ویان وجهلری مثلثلردن [مجاور ایکی مثلثك اتحادیله تولد ایدن متوازی الاضلاعلر ویا شبه منحرفلر دخی اوله‌بیلور] عبارت اولان اشکال مجسمه‌یه « اجسام ناقصه » تعبیر اولنور. مذکور موازی مستویلر اوزرنده تشکل ایدن (ف ه ی ب ج د ط) شکل کثیر الاضلاعلره جسمك « قاعدتینی » [اوست طرفده بولنانه « قاعدهٔ فوقانیسی » وآلتده‌کنه « قاعدهٔ تحتانیسی »] ، بونلرك بعد و مسافه‌سنه جسمك « ارتفاعی » و اشبو ارتفاعی تنصیف ایدن و قاعده‌لره موازی بولنان مقطعه « قاعدهٔ وسطیه‌سی » دینلور .

§ ٢٧)

دعوی: بر جسم ناقصك مساحهٔ حجمیه‌سی ے،ےَ قاعدتیننك و ے١ قاعدهٔ وسطیه‌سی درت مثلثك مجموعیله ارتفاع جسمك سدسی حاصل ضربنه مساویدر. یعنی جسمك مساحهٔ حجمیه‌سنی ﮐ ، ف‌فَ ارتفاعنی ع ایله کوستریرسه‌ك :



شکل ٣٩

ﮐ = (ے + ےَ + ٤ ے١) × ١/٦ ع اولور.

اثباتی : (شکل — ۳۹) { ے قاعده‌سی : ﻫ
ےَ « : ك } قدر ضلعلی بر ذوکثیر

الاضلاعدن عبارت اولدیغی تقدیرده جسم ناقصك مثلث شکلنـده اولان [شکلمزده ط ﻫ ی ، ی ﻫ ی مثلثلری ط ﻫ ی ی متوازی الاضلاعی تشکیل ایتمکده‌در] یان وجهلرینك عددی (ﻫ + ك) در .

ایمدی قاعدهٔ وسطیه‌نك داخلنده الثان هر قنغی بر م نقطه‌سیله جسم ناقصك هر ضلع مجسمندن بر مستوی کچیریلورسه جسم ناقص:

۱) رأسی م ، ارتفاعی $\frac{1}{2}$ ع ، قاعده‌سی جسمك ف ﻫ ی قاعدهٔ فوقانیسندن عبارت اولمق اوزره براهرامدن {§ ۲۰} (= $\frac{1}{6}$ ع . ے)؛

۲) رأسی م، ارتفـاعی $\frac{1}{2}$ ع ؛ قاعده‌سی جسمك ب ح ی ط قاعدهٔ تحتانیسندن عبارت اولمق اوزره براهرامدن {§ ۲۰} (= $\frac{1}{6}$ ع . ےَ)؛

۳) رأسی م، قاعـده‌لری (ﻫ + ك) قدر مثلثلردن عبـارت اولان (ﻫ + ك) قدر اهرام مثلثیلردن ؛

ترکب ایتدیکی کورلمکده‌در .

حالبوکه (۳) رقمی تحتنده ذکر اولنان اهرام مثلثیلردن هربری [مثلا م (ب ح ف)] قاعـدهٔ وسطیـه ایله بری اهرام مثلثی [م (ل ﻫ ف)] اولمق و تکمیل اهرامك درتده برینه مساوی [٥] بولنمق اوزره ایکی قسمه تقسیم اولنور. بو کچوك اهراملر ایچون، قاعدهٔ وسطیـه اوزرنده تشکل

---

[٥] م (ل ﻫ ف) ، م (ب ح ف) اهراملرینك رأسلری مشترك ، قاعده‌لری عینی بر مسـتوی اوزرنده بولندیغندن ارتفاعلری عینی اولملغله مسـاحهٔ حجمیه‌لری {§ ۲۰ ، تنبیه } قاعده‌لریله متناسبدر . بناء علیه مثلا برنجیسنك مساحهٔ حجمیه‌سنه ے و ایکنجیسنککنه ےَ؛ ل ﻫ ف مثلثنك مساحه‌سنه ح و (ب ح ف) نککنه

ایدن م ل ۞ ، م ۞ ں . . . الخ مثلثلری، قاعده اعتبار ایدیله‌جك اولورسه انلردن بر قسمنك رأسلری قاعدۀ فوقانی و قسم دیکرینککی قاعدۀ تحتانی اوزرنده بولنور. بو حالده هر برینك ارتفاعی $\frac{1}{2}$ ع اولوب قاعده‌لری مجموعی ایسه (ل ۞ س ص ش ں ت) قاعدۀ وسطیه‌سی سطحنه وبناءً علیه مساحۀ حجمیه‌لری مجموعی ($\frac{1}{6}$ ع ے) . مساویدر . ایشته رأسلری م و قاعده‌لری جسم ناقصك یان وجهلرندن عبارت اولان بیوك اهراملرك مساحۀ حجمیه‌لری مجموعی (= $\frac{1}{6}$ ع × ٤ ے) اوله‌جغندن ۱و۲ نومرولی مساوات ایله دخی جمع ایدیلورسه جسم ناقصك حجمی .

$$ک = \frac{1}{6} ع ے + \frac{1}{6} ع ے + \frac{1}{6} ع × ٤ ے$$ اولوب بورادن

$$ک = \frac{1}{6} ع (ے + ے + ٤ ے) \ldots\ldots (٩)$$ بولنور.

(٢٨ §

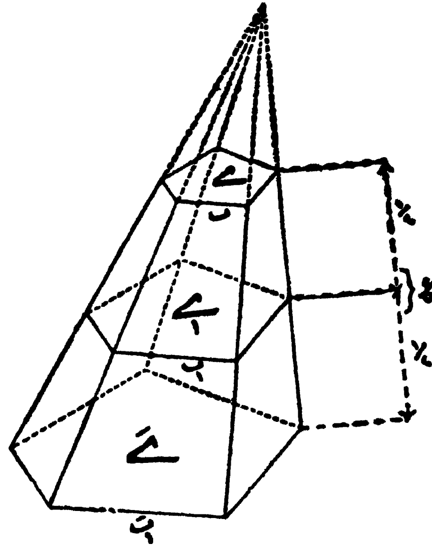
تنبیه : : (شکل — ٤٠) بر اهرامك قاعده‌سنه موازاتاً بر مستوی ایله قطعندن حاصل اولان اهرام ناقصده ے، ے، ے شکللری یکدیکرینه مشابه اولدیغندن نظیر نظیره اولان ضلعلری ب ، ب ، ب ایله ارائه اولندقده {§ ٢٤ ، تنبیه (٢)}

ح دیرسه‌ك $\frac{ک}{ک} = \frac{ح}{ح}$ اولوب {ه.§١٠٦} $\frac{ح}{ح}$ $\frac{(ل ف)^2}{(ب ف)^2}$ و {ه.§٧٧،(٣)}

$\frac{ل ف}{ب ف} = \frac{ف ف}{ف ف}$ و $\left\{\begin{matrix} ف ف = \frac{1}{2} ع \\ ف ف = ع \end{matrix}\right\}$ اولدیغندن $\frac{ک}{ک} = \frac{1}{4} \therefore ک = \frac{1}{4} ک$

اولور .

$$\frac{\text{ب}^2}{\text{ح}} = \frac{\bar{\text{ب}}^2}{\bar{\text{ح}}} = \frac{\text{ب}_1^2}{\text{ح}_1} \therefore \{\text{ه. § ۱۱۸ ب}\}$$



شکل ٤٠

$$\frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ح}}} = \frac{\bar{\text{ب}}}{\sqrt{\bar{\text{ح}}}} = \frac{\text{ب}_1}{\sqrt{\text{ح}_1}}$$

اولوب اشبو کسرلرك قیمت مشترکه‌سی م فرض اولنورسه

$\text{ب} = \text{م}\sqrt{\text{ح}}$ ، $\bar{\text{ب}} = \text{م}\sqrt{\bar{\text{ح}}}$ ، $\text{ب}_1 = \text{م}\sqrt{\text{ح}_1}$ بولنور.

حالبوکه {ه. § ٤٦} $2\,\text{ب}_1 = \text{ب} + \bar{\text{ب}}$ اولمغله محللرینه مساویلری وضع ایدلدکده :

$$٢\,م\sqrt{ب_١} = م\sqrt{ح} + م\sqrt{حَ} \quad ∴$$

$$٢\sqrt{ب_١} = \sqrt{ح} + \sqrt{حَ} \quad ∴$$

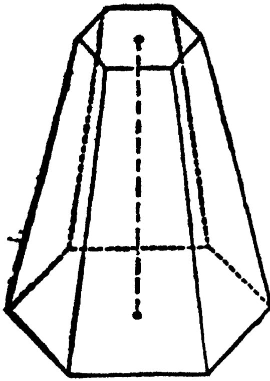
$٤\,ب_١ = ح + حَ + ٢\sqrt{ححَ}$ بولنمغله (٩) مساواتنده محلنه وضع ایدیلوب اهرام ناقصك مساحهٔ حجمیه‌سی دخی ح ایله کوستریلورسه:

$ح = \frac{١}{٣}\,ع\,(ح + حَ + \sqrt{ححَ})$ ......(١٠) بولنور.

§ ١٠٢٨)

دعوی : قاعده‌لری اشکال منتظمه‌دن عبارت اولان و قاعده‌لرینك مرکزلری، کندیلرینه عمود بر مستقیم اوزرنده بولنان اهرام ناقصك یان وجهلری مجموعی قاعدتیننك مجموع اضلاعنك نصفیله مذکور قاعده‌لردن برینك برضلعندن دیکرنده نظیری اولان ضلعنه تنزیل اولنان عموده حاصل ضربنه مساویدر . [شکل — ٤١ قاعده‌لری مسدس منتظم براهرام ناقصی ارائه ایدر] .

اثباتی: اهرام ناقص مذکورك یان وجهلری یکدیکرینه مساوی شبه منحرفلردن عبارت اولوب عددی، اهرام ناقصك قاعده‌لرندن برینك عدد اضلاعنه مساوی اولدیغندن اشبو شبه منحرفلردن برینك مساحهٔ سطحیه‌سی اهرام ناقصك بر قاعده‌سنك عدد اضلاعنه ضرب اولنورسه بالجمله شبه منحرفلرك مساحهٔ سطحیه‌سی بولنه‌جغی آشکاردر.



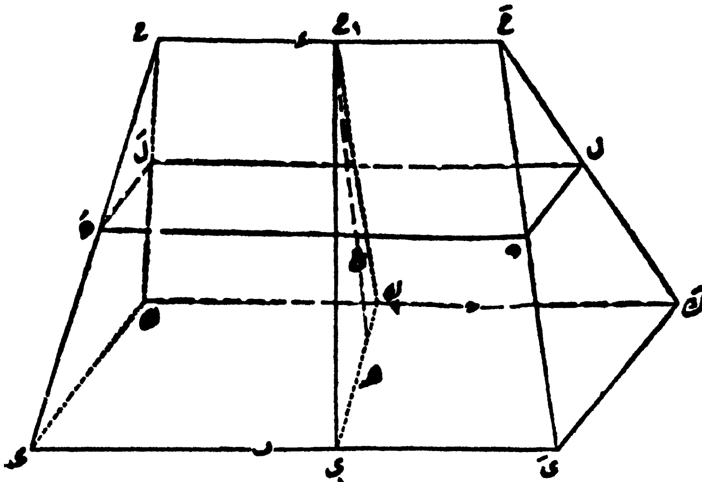
شكل ٤١

بو حالده مذكور شبه‌منحرفلردن برینك قاعدهٔ فوقانیسی ب تحتانیسی بَ و ارتفاعی م و اهرام ناقصك قاعده‌لرندن برینك عدد اضلاعی ﻫ وبان وجهلرینك مساحهٔ سطحیه‌لری مجموعی مج ح فرض اولنورسه:

مج ح $= \frac{1}{2}$ م (ب+بَ) ﻫ . . . . .(١١)

اولمش اولور.

تنبیه: اهرام ناقصك قاعدهٔ فوقانیسی ل وقاعدهٔ تحتانیسی لَ فرض اولنورسه اهرام ناقص مذكورك سطح خارجیسی $= \frac{1}{2}$ م (ب+بَ)ﻫ+ل+ لَ . . . (١٢). بولنور.



شكل ٤٢

(§ ٢٩

تنبیه:(شکل — ٤٢) ح ك ی، حَ كَ یَ قاعده‌لری موازی‌اولیان حَ یَ كَ منشور مثلثیسی بر جسم ناقص اولوب ایکی موازی ب، ج ضلع مجسمنك ، ےَ قاعدهٔ تحتانیسنده واوچنجی د ضلع مجسمنك دخی ے قاعدهٔ فوقانیسنده بولندیغنی فرض و (ب) نك (ج)، اولان بعدینی هـ ایله ارائه ایده‌لم .

فرضیاتمزده ے قاعدهٔ فوقانیسنك ارتفاعی (٠) اولدیغندن:

$$\{\text{ه.}\ \S\,١٠٣\}\quad \text{ےَ} = \frac{١}{٢}\,\text{ه}\,(\text{ب}+\text{ج})\ ,\ \text{ے} = ٠.$$

$$٤\ \text{ے}_{١} = \text{ه}\left(\frac{\text{ب}+\text{د}}{٢} + \frac{\text{ج}+\text{د}}{٢}\right)\ [**]$$

اولدیغندن (٩) مساواتنده محللرینه وضع اولندقده:

$$\text{ک} = \frac{١}{٦}\,\text{ع}\left\{\frac{١}{٢}\,\text{ه}\,(\text{ب}+\text{ج}) + \text{ه}\left(\frac{\text{ب}+\text{د}}{٢} + \frac{\text{ج}+\text{د}}{٢}\right)\right\}\ \text{بولنور.}$$

ایمدی منشور مثلثی ناقصك ضلع مجسملرینه عموداً بر مستوی ایله حاصل اولان $\text{ح}_{١}\,\text{ك}_{١}\,\text{ی}_{١}$ مقطع قائمی ط ایله کوستریله‌رك $\text{ط} = \frac{١}{٢}\,\text{ع}\,\text{ه}$ اولمغله $\text{ه} = \frac{٢\text{ط}}{\text{ع}}$ اولوب بوحالده :

[**] $\text{ے}_{١}$ دخی شبه منحرف شکلنده اولوب بر ضلعی $\frac{\text{ب}+\text{د}}{٢}$ و دیکر ضلعی $\frac{\text{ج}+\text{د}}{٢}$ و ارتفاعی $\frac{١}{٢}$ هـ اولدیغی بالسهوله آکلاشیلمقده اولدیغندن :

$$\text{سطحی} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}\,\text{ه}\left(\frac{\text{ب}+\text{د}}{٢} + \frac{\text{ج}+\text{د}}{٢}\right)\ \text{در.}$$

ك = $\frac{1}{6}$ ع {$\frac{ط}{ع}$ (ب + ح) + $\frac{ط}{ع}$ (ب+ح+٢ء)} واصلاح ايدلد.
كده قاعده‌لری غیرموازی اولان برمنشور مثلثی ناقصك مساحهٔ حجمیه‌سی

ك = ط . $\frac{ب+ح+ء}{3}$ .... (١٣) اولمش اولور.

§ ٣٠) [غ.م.ن]

تنبیه: (٩) نومرو ایله مرقم اولان افاده عمومی یعنی ب ، ے مثللو ایکی موازی شکل [قاعدتین] آره‌سنه محصور و قاعدهٔ تحتانیه‌دن س ارتفا- عنده هر قنغی بر (ف) مقطعی:

ف = ب + ح س + ء س^2 + ه س^3 .... (لا)

مساواتیله معین اولان کیفی بر جسمك ك حجمی حقنده دخی جاریدر.
(لا) مساواتنده‌کی ب، ح، ء، ه کمیاتی کیف مایشاء کمیات ثابته‌دن عبارتدر.
تکمیل ع ارتفاعی ن قدر اقسامه تقسیم و تقسیمات نقطه‌لرندن ب ، ے قاعده‌لرینه موازی مستویلر رسم ایدیلورسه (ن—١) قدر مقطعلر حصوله کلیر.
اشبو مقطعلر ایله جسمك ے قاعدهٔ فوقانیسی ، هر برینك ارتفاعی $\frac{ع}{ن}$ اولان منشورلرك قاعدهٔ فوقانیلرندن عبارت کبی تصور اولندقده:

ے قاعدهٔ فوقانیسنك ارتفاعی [قاعدهٔ تحتانیه‌دن اولان بعدی] ع } اولدیغندن (لا) افاده-
ے$_1$ » وسطیه‌سنك » » » » » $\frac{1}{2}$ع }

سنه تطبيق ايده‌رك يعنی س يرينه ع، ½ ع؛ ف يرينه ده ے، ےِ۱ وضع ايديله‌رك:

ے = ب + ح ع + د ع² + ه ع³
ےِ۱ = ب + ½ ح ع + ½ د ع² + ½ ه ع³ } .... (ه) اولور.

ايمدی حصولی بالاده تصور اولنان ن قدر منشورلرك مجموعی معلوم اولان جسمك مساحهٔ حجميه‌سندن عبارت اولوب حالبوكه هر بريسنك مساحهٔ حجميه‌سی ع/ن × ف اولديغندن بوراده‌كی (ف) نك قيمتی، (لا) مساواتنده (س) محلنه (ف) نك قاعدهٔ تحتانيدن اولان ارتفاعی متعاقباً وضع اولنه‌رق تحدث ايده‌جك اولان افادات جبريه‌دن عبارت اولمغله اشبو افادات جبريه ع/ن × ف افاده‌سنده ف نك محانه قونيله‌رق جمله‌سی جمع ايديلمك اقتضا ايدر. بو حالده.

ك = { ب + ح ع/ن + د (ع/ن)² + ه (ع/ن)³ } ع/ن
+ { ب + ح ٢ع/ن + د (٢ع/ن)² + ه (٢ع/ن)³ } ع/ن
+ { ب + ح ٣ع/ن + د (٣ع/ن)² + ه (٣ع/ن)³ } ع/ن
+ . . . .
+ . . . .
+ { ب + ح ن ع/ن + د (ن ع/ن)² + ه (ن ع/ن)³ } ع/ن

اولوب {م. § ٢٣، (١) و § ٢٤، (١)، (٣)} ماده‌لری پيش نظره آلنه‌رق؛

$$\text{ك} = \text{ب}\,\text{ع} + \frac{\text{ج}\,\text{ع}^{٢}}{٢}\left(١ + \frac{١}{\text{ه}}\right) + \frac{\text{د}\,\text{ع}^{٣}}{٦}\left(١ + \frac{١}{\text{ه}}\right)\left(٢ + \frac{١}{\text{ه}}\right)$$

$$+ \frac{\text{ه}\,\text{ع}^{٤}}{٤}\left(١ + \frac{١}{\text{ه}}\right)^{٢}$$ بولنور .

ه اعظم نامتناهی اوله‌رق اخذ اولنورسه جسم مفروضك مساحهٔ حجمیه‌سی:

$$\text{ك} = \text{ب}\,\text{ع} + \frac{١}{٢}\,\text{ج}\,\text{ع}^{٢} + \frac{١}{٣}\,\text{د}\,\text{ع}^{٣} + \frac{١}{٤}\,\text{ه}\,\text{ع}^{٤} \quad .... (١٤)$$

اولوب مثالمزده قاعدهٔ تحتانی $\text{ے}' = \text{ب}$ اولدیغندن اشبو مساوات (ه) مساواتیله [ه مساواتنك ایکنجیسی (٤) ایله ضرب اولندقدن صوکره] طرف طرفه جمع ایدیلورسه :

$$\text{ے} + \text{ے}' + ٤\,\text{ے}_{١} = ٦\,\text{ب} + ٣\,\text{ج}\,\text{ع} + ٢\,\text{د}\,\text{ع}^{٢} + \frac{٣}{٢}\,\text{ه}\,\text{ع}^{٣}$$

اولوب طرفینی $\frac{١}{٦}\,\text{ع}$ ایله ضرب اولندقده :

$$\frac{١}{٦}\,\text{ع}\,(\text{ے} + \text{ے}' + ٤\,\text{ے}_{١}) = \text{ب}\,\text{ع} + \frac{١}{٢}\,\text{ج}\,\text{ع}^{٢} + \frac{١}{٣}\,\text{د}\,\text{ع}^{٣} + \frac{١}{٤}\,\text{ه}\,\text{ع}^{٤}$$

اولمغله

$$\text{ك} = \frac{١}{٦}\,\text{ع}\,(\text{ے}' + \text{ے} + ٤\,\text{ے}_{١}) \quad .... (١٤')$$ اولمش اولورکه

ه = ٠ اولدیغی وقت الکزیاده قابل استعمال اولدیغی کبی § ٣١ — ٣٧) نجی ماده‌لرده اجسامك حجملری حقنده باشقه بر طریق ایله استخراج اولنه‌جق اولان افادات . افادهٔ سابقه‌نك حالات خصوصیه‌سندن عبارتدر .

تنبیه : ه = . ایچون (١٤) نجی دستور [*]

$$\text{ک} = \frac{1}{4}\,\text{ع}\left[\text{ب} + 3\left\{\text{ب} + \text{ح} \times \frac{2}{3}\,\text{ع} + \text{ء}\left(\frac{2}{3}\,\text{ع}\right)^{2}\right\}\right]$$

حالنه افراغ اولنه‌بیلوب ایکنجی بیوك معترضه ایچنده‌کی افادهٔ جبریه قاعدهٔ تحتانیدن ارتفاعی $\frac{2}{3}$ ع اولان وتعبیر دیکرله ارتفاع کاملك ایکی ثلثنده بولنان برمقطعك مساحهٔ سطحیه‌سندن عبارت اولدیغی (لا) افاده‌سی کوز اوکنه کتیریله‌رك اکلاشیله‌جغی جهتله (ص) ایله ارائه اولنورسه :

$$\text{ک} = \frac{1}{4}\,\text{ع}\left(\text{ب} + 3\,\text{ص}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$ اولور .

§ ٣٠ ، ١)

وظائف

ا) : برمکعبك (٩) افاده‌سنه تطبیقاً مساحهٔ حجمیه‌سنك تحریسی مطلوبدر .
ب) : برمتوازی المستطیلاتك » »
ح) : برمنشورك » »
ء) : براهرامك » »

---

[*] $\text{ک} = \frac{1}{4}\,\text{ع}\,\text{ب} + \frac{3}{4}\,\text{ع}\,\text{ب} + \frac{1}{2}\,\text{ح}\,\text{ع}^{2} + \frac{1}{3}\,\text{ء}\,\text{ع}^{3}$

$= \frac{1}{4}\,\text{ع}\left(\text{ب} + 3\,\text{ب} + 2\,\text{ح}\,\text{ع} + \frac{4}{3}\,\text{ء}\,\text{ع}^{2}\right)$

$= \frac{1}{4}\,\text{ع}\left\{\text{ب} + 3\left(\text{ب} + \frac{2}{3}\,\text{ح}\,\text{ع} + \frac{4}{9}\,\text{ء}\,\text{ع}^{2}\right)\right\}$

$= \frac{1}{4}\,\text{ع}\left[\text{ب} + 3\left\{\text{ب} + \text{ح} \times \frac{2}{3}\,\text{ع} + \text{ء}\left(\frac{2}{3}\,\text{ع}\right)^{2}\right\}\right]$ اولور .

§ ٣٠ ، ب)

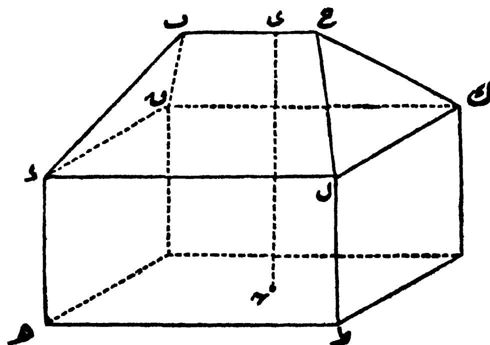
مسائل

١) : قاعدە‌تینك بر ضلعلری ٥ و ٣ متره وارتفاعی ١٢ متره اولان اهرام ناقص مربعینك مساحهٔ حجمیه‌سنی حساب ایتمك ؛

٢) : قاعدهٔ فوقانیسی ١٥ $م^٢$ ، تحتانیسی ١٢ $م^٢$ ، حجمی ١٤٠ $م^٣$ اولان براهرام ناقصك ارتفاعنی حساب ایتمك ؛

٣) : ارتفاعی ١٨ م اولان وقاعدە‌تینی ایکی مسدس منتظمدن عبارت بولنان بر اهرامك (قاعدە‌تینك بر ضلعلری $\frac{٣}{٢}$ نسبتنده و بیوکنك برضلعی ٦ م اولدیغنه نظراً) مساحهٔ حجمیه‌سنی حساب ایتمك ؛

٤) : (شکل—٤٣) ایله کوستریلان برجسمك مساحهٔ حجمیه‌سنی حساب ایتمك [ك و هـ ط هـ = متوازی المستطیلات ، ح ك ى منشور مثلثی ناقص ؛ ط هـ = ١٥ ، هـ ى = ٧,٥ ك ل = ٨ ، ح ب = ٧ ، ى ج = ١٣,٥ متره اولسون]



شکل ٤٣

٥) : يوللرك تعميرى ايچون بونلرك كنارلرنده محافظه ايديلان قيرمه طاشلرك كوستردكارى شكلده‌كى اجسامك [شبه اهرام ناقص مستطيلينك] يعنى يان وجهلرى شبه منحرف متساوى الساقيندن وقاعدتينى مستطيللردن عبارت اولوب (شكل—٤٤) ايله كوستريلن اجسامك حـ مساحهٔ حجميه‌لرينى ويرن افاده‌نك ، ياهف د ط مستويسى واسطه‌سيله جسم مذكور ايكى منشور مثلثىٔ ناقصه بالتفريق (١٣) وياخود طوغريدن طوغرى‌يه (٩) افاده‌سى قوللانيله‌رق و

شكل ٤٤

ب ج = د ط = ق ؛ هف = حر = قَ
ب ط = ج د = ك ؛ هر = حف = كَ   } فرض ايديله‌رك
ل ص = ع

حـ = ١/٦ ع { ق ك + قَ كَ + (ك + كَ) (ق + قَ) } ،

اولديغنى استخراج ايتمك مطلوبدر . — ج ف ، د ح ، ط ع ، ب هـ ضلع مجسملرينك استقامت اوزره اخراجى عينى برنقطه‌ده تلاقى ايدرسه جسم مفروض براهرام ناقص اولوب قَ/ق = كَ/ك اوله‌جغندن حـ = ١/٣ ع { ق ك + قَ كَ + ق كَ (= قَ ك) } اولوركه (١٠) دستورنده‌كى ب ، بَ يرينه مساويلرى اولان ق ك ، قَ كَ وضع اولنمقله‌ده استحصال اولنور .

دردنجی فصل

اسطوانه ـــ مخروط ـــ کره

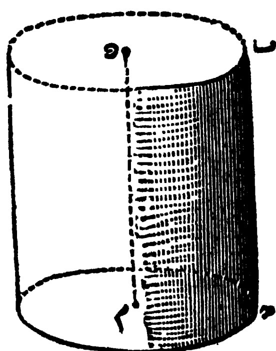
باب اول

مبحث اسطوانه

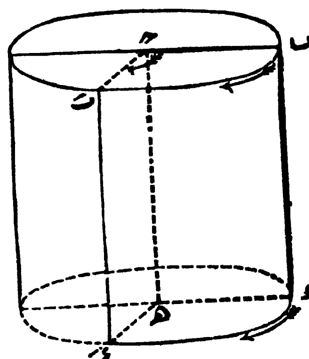
§ (۳۱)

تعریفات

(شکل ـ ٤٥) بر مستطیلك [ب ح ه ء] ضلعلرندن بری [ه ح] محور اعتبار اولنه‌رق بونك اطرافنده دوری ویاخود (شکل ـــ ٤٦) بر نهایتی بر محیط



شکل ٤٦



شکل ٤٥

دائره‌نك هرنقطه‌سنه طوقونه‌رق هروضعیتده کندینه موازتاً وسطح دائره
عموداً برقسم مستقیمك [ب ح] حرکتی تصور اولنسون: مستطیلك، محو
موازی اولان ضلع دیکری [ب ء] ویا قسم مستقیمك کندیسی «اسطوا
دورانیه» تعبیر اولنان برشکلك {هـ. § ۱، ۲۱} سطح مستدیرنی ومستطیلا
ضلعین باقیینی اسطوانه‌نك دائره شکلنده {هـ. § ۱ ، ۲۱} قاعده‌لرنی وقد
مستقیمك دیکر نهایتی قاعدتیندن برینك {هـ. § ۱ ، ۱٤} محیطنی ومستطیلا
سطحی {هـ. § ۱ ، ۲٤} جسم اسطوانه‌یی تولیـد ایلر . مستطیلك ثاب
اولان ضلعنه «محور» ، سطح مسـتدیرنی تولید ایدن ضلع مقابلنه ویا محی
دائره‌یه طوقونه‌رق حرکت ایلیان قسم مستقیمه «مولّد» وقسم مستقیمه
طوقوندیغی دائره‌یه «موجه» ، قاعـدتینك مرکزلری بیننه موصول ح هـ
م ۞ مستقیمنه «محور» تسمیه اولنور .

براسطوانهٔ دورانیـه، یان وجهلری غایت اکسز و عـددی نامتنا
اولان برمنشور قائم کبی تلقی ایدیله‌بیلور . بو حالده عدد اضلاعی نامتناه
برشکل منتظمدن عبارت اوله‌جق اولان بر قاعده‌سنك نصف قطر قائمی
خارجاً مرسوم دائره‌نك نصف قطرینـه ومحیطی مذکور دائره‌نك محیط
منطبق اولور .

اشبو دائره‌نك نصف قطری ر واسطوانه محورینك طولی ع؛ منش
متصورك یان وجهلری محدود فرض اولندیغنه نظراً برقاعده‌سنك بر ضا
ب وعدد اضلاعی ۞ ونصف قطر قائمی رَ ایله ارائه اولندقده : منشو
حجمی {§ ۲۳} = ع . ے اولوب {هـ. § ۱۲۰} ے = $\frac{1}{2}$ رَ . ب.
اولدیغندن منشورك حجمی = ع × $\frac{1}{2}$ رَ . ب . ۞ بولنور .

ایمدی ۞ اعظم نامتناهی اولنجه ب اصغر نامتناهی اوله‌جغندن غای
منشور اسطوانه‌یه منقلب اوله‌رق رَ = ر ؛ ب . ۞ = ۲π ر اولمغ

محللرینه وضع ایدیلور و {§ ٢٣ ، ١ وتنبیه} نظر مطالعه‌یه آلنورسه :

اسطوانهٔ دورانیه‌نك مساحهٔ حجمیه‌سی $= \pi\, ر^{٢} \cdot ع$ .... (١٦)

» » سطح مستدیری $= ٢\pi ر \cdot ع$ .... (١٧)

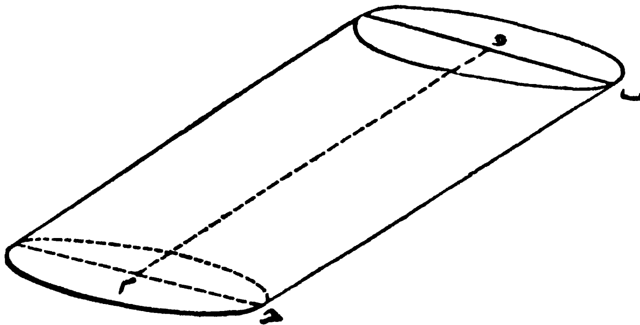
» » خارجیسی $= ٢\pi ر (ع + ر)$ ...... (١٨)

بولنور .

تنبیهات

(١) [غ.م.]: (١٤) ویا (١٥) افاده‌لرنده ے ، ےَ ، ے١ ایله‌ب،ص، یرینه جسم ، اسطوانه اولدیغنه نظراً مساویلری اولان $\pi\, ر^{٢}$ قونولورسه (١٦) نومرولی دستورك استحصال اوله‌جغی کوریلور .

(٢): قسم مستقیم متحرك ، طوقوندیغی دائره مستویسنه مائلاً واقع اولورسه (شکل ـ ٤٧) قاعده‌لری دائره اولان مائل براسطوانه تولد ایلرکه عینی قاعده وارتفاعده بولنان اسطوانهٔ دورانیه‌یه {§ ٢١} معادل اوله‌جغندن مساحهٔ حجمیه‌سی کذلك ($\pi\, ر^{٢}$ ع) ه مساوی اولور .



شکل ٤٧

(٣) : اسطوانهٔ دورانیه‌نك برمولد استقامتنده انکشافی برضلعی ارتفاع ویا مولد اسطوانه‌یه ودیکر ضلعی اسطوانه‌نك ایکی قاعده‌لردن برینك محیطنه مساوی اولان برمستطیلدن عبارت اولور .

§ (١٠٣١)

وظائف

ا) : ارتفاعلری مساوی اولان اسطوانه‌لرك نه ایله متناسب اولدیغنك ؛

ب) : قاعده‌لرینك نصف قطرلری مساوی اولان اسطوانه‌لرك نه ایله متناسب اولدیغنك ؛

ج) : (ا) وظیفه‌سنده فرض اولان اسطوانه‌لرك اولاً : سطح مستدیرلری ، ثانیاً : سطح خارجیلری بیننده‌کی نسبتك نه اولدیغنك ؛

د) : (ب) وظیفه‌سنده فرض اولنان اسطوانه‌لرك اولاً : سطح مستدیرلری ؛ ثانیاً : سطح خارجیلری بیننده‌کی نسبتك نه اولدیغنك ؛

ه) : قاعده‌سنك نصف قطری درت دفعه بیودیلان اسطوانه‌نك حجمی اولکنك قاچ مثلی اولدیغنك ؛

و) : ارتفاعی تنصیف ایدیلن بر اسطوانه‌نك حجمی نه اوله‌جغنك ؛

ز) : قاعده‌لرینك نصف قطرلری وارتفاعلری $\frac{1}{2}$ نسبتنده اولان ایکی اسطوانه‌نك بیننده‌کی نسبتك ؛

ح) : (ه) وظیفه‌سنده فرض ایدیلن ایکی اسطوانه‌نك سطح مستدیرلری و خارجیلری نه نسبتده بولندیغنك ارائه‌سی ؛

ط) : (ح) وظیفه‌سنك (و) اسطوانه‌لرینه نظراً ایفاسی ؛

ی) : (ح) وظیفه‌سنك (ز) اسطوانه‌لرینه نظراً ایفاسی ؛
ك) : اسطوانه حجمنك (۹) نومرولی افاده‌یه نظراً تحریسی مطلوبدر.

§ (۳۱، ب)

مسائل

۱) : قاعده‌لری مقوادن ، سطح مستدیری عادی کاغددن عبارت اولمق اوزره براسطوانهٔ دورانیه تشکیلی مطلوبدر.
۲) : ارتفاعی ۴،۵۰م ، قاعده‌سنك نصف قطری ۰،۷۵ م اولان بر اسطوانه‌نك مساحهٔ مجسمیه‌سنی حساب ایتمك ؛
۳) : حجمی ۹ م۳ ، قاعده‌سنك نصف قطری ۰،۵۰ م اولان براسطوانه‌نك ارتفاعنی بولمق ؛
+ ٤) : ارتفاعی ۳،۰۵ م ، قاعده‌سنك نصف قطری ۰،۲۵ م اولان بر اسطوانهٔ دورانیه‌نك اولاً : سطح مستدیرینی ؛ ثانیاً : سطح خارجیسنی بولمق ؛
+ ۵) : سطح مستدیری ۲ م۲ ، ارتفاعی ۳ م اولان براسطوانهٔ دورانیه‌نك مساحهٔ مجسمیه‌سنی حساب ایتمك ؛
+ ٦) : اوچ متره ارتفاعنده وقاعده‌سی بش متره محیطنده اولان اسطوانه شکلنده بر حوضك قاچ لیتره صو استیعاب ایده‌جکنی حساب ایتمك مطلوبدر .
+ ۷) : شبه اهرام ناقص مستطیلی شکلنده و ۳،۵ م ارتفاعنده بولنان بر طاش ییغیننك { الت قاعده سنك ابعادی { ۸ م ، ۵ » } ؛ اوست » » { ٦ » ، ۲ » } }

اولدیغی معلومدر . یومیه اون ساعت چالیشان وبش دقیقه
ظرفنده ال عربه‌سیله ٤٠ دم³ قسمنی قالدیره‌بیلن برعمله‌یه،
یومیه‌سی ٥ غروش حسابیله مذکور طاش ییغیننك قالدیرلمسی
ایچون قاچ غروش ویرمك لازمدر ؟

+ ٨) : ١٠ م قطرنده واسطوانه شکلنده برحوضك، ٥٠ م³ صواستیعاب
ایده‌بیلمك ایچون، عمقی نقدر اولمق لازم کلیر ؟

٩) : برمستطیلك برکره (ب) ضلع کبیری، برکره‌ده (ح) ضلع صغیری
اطرافنده دوراننددن حاصل اولان ایکی اسطوانه‌نك اولاً: حجملری،
ثانیاً : سطح مستدیرلری ، ثالثاً : سطح خارجیلری بیننده‌کی
نسبتك تعیینی و مستطیل برینه مربع فرض اولندیغی حالده
مسئله‌نك حلی مطلوبدر .

+ ١٠): اسطوانه شکلنده بر دیرکك قطری ١،٥٠ م وارتفاعی ٧،٤٠ م
اولوب سطح مستدیرینك برمتره مربعی سطحنك بویانمه‌سی ایچون
١٠ غروش ویرلدیکی حالده مصارف کامله‌نك مقدارینی حساب
ایتمك مطلوبدر .

+ ١١): چینقودن معمول اسطوانه شکلنده بر صو خزینه‌سنك نصف
قطری ١،٢٧ م و ارتفاعی ٤،٧٥ م اولوب سطح مستدیرینك
بر متره مربعی ٨،٢٥ غروش و قاعده سطحلرینك بهر متره
مربعی ١٤ غروش صرفی ایله اعمال ایدلدیکی حالده جمعاً یکون
قاچ غروش ویرمك لازم کلیر ؟

+ ١٢): چینقودن معمول اسطوانه شکلنده بر حوض ٥٠٠٠ لیتره
صو استیعاب ایتدیکی و عمقی ، قاعده‌سی نصف قطرینك ضعفی
اولدیغی معلوم ایکن عمق مذکوری حساب ایتمك ،

١٣): قاعده‌سی محیطی ١٤ دم ، ارتفاعی ٦ دم اولان براسطوانه‌نك انكشافنی رسم ایتمك ؛

١٤): ١٠٧٢ م قطرنده ٠،٤٨ م ثخننده بولنان بر دكرمن طاشنك مركزنده واسطوانه شكلنده‌كی ثقبه ٠،١١٥ متره نصف قطرنده اولوب بردسمتره مكعبی طاشك ثقلتی ٢٠٧٦٠ كیلو غراماولدیغی معلوم ایكن ،مذكور طاشك ثقلتی حساب ایتمك مطلوبدر .

باب ثانی

مبحث مخروط

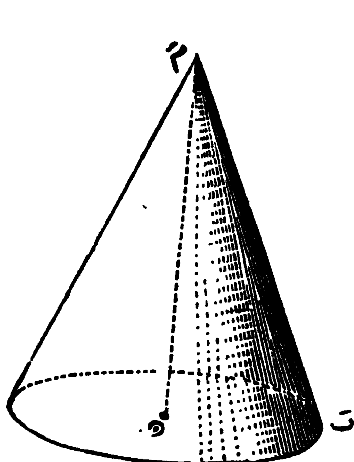
§ ٣٢)

تعریفات

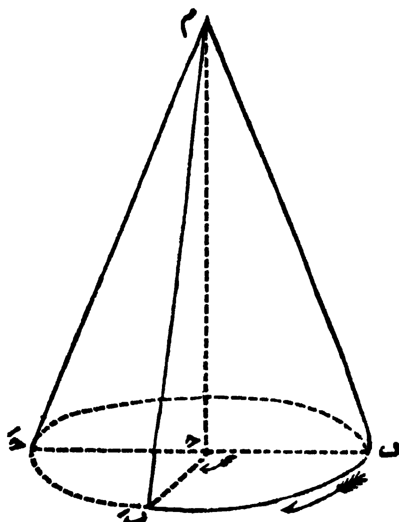
(شكل — ٤٨) بر مثلث قائم الزاویه‌نك [م ب ح]، ضلع قائملرندن بری اطرافنده دوری و یاخود (شكل — ٤٩) بر دائره‌نك مركزندن سطحنه اقامه اولنان عمودك اوزرنده واقع بر نقطه‌دن كچمك و دائما محیط دائره‌یه طوقونمق اوزره بر مستقیمك [م ب] حركتی تصور اولنسون . مثلث قائم الزاویه‌نك وتر قائمه‌سی ویا مستقیم مفروض « مخروط دورانی »تعبیراولنان شكلك سطح مستدیرنی و مثلثك ضلع متباقیسی ، محیط دائره شكلنده «قاعده‌سنی» ومثلثك سطحی جسم مخروطی تولید ایلر.

مثلث قائم‌الزاویه‌نك وتر قائمه‌سنه ویامستقیم مفروضه «مولد» ومستقیمك

حركتی توجیه ایدن محیط دائره‌یه «موجه»، و تر قائمه‌نك ویا مستقیم مفروضك ثابت نقطه‌سنه «رأس» و رأس ایله قاعده‌نك مرکزی بیننه‌موصول مستقیمه «محور»، رأسدن قاعده‌یه تنزیل اولنان عموده «ارتفاع» دینلور.



شکل ٤٩

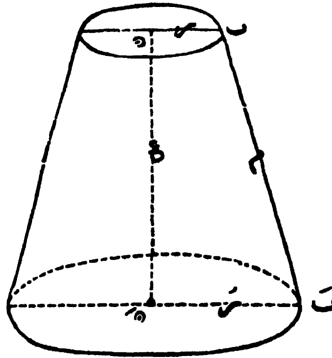


شکل ٤٨

برمخروط دورانی: قاعده‌سی، ضلعلرینك هر بری اصغر وعددی اعظم نامتناهی اولان برشکل منتظمدن و وجهلری نامتناهی کچوك قاعده‌لره‌مالك اعظم نامتناهی عدده مثلث متساوی الساقینلردن عبارت بر اهرام کبی تلقی ایدیله‌بیلور.

شکل منتظم متصورك نصف قطر قائمی ر، بر ضلعی ب وعدداضلاعی ه؛ ومخروطك ارتفاعی ع، مولدی م وقاعده‌سنك نصف قطری ر فرض اولنورسه مذکور اهرامك حجمی {§٢٥} = $\frac{1}{3}$ ع. ے اولوب {ه.§١٢٠}

$ى = \frac{1}{2}$ رَ . ب . ﻫ اولديغندن اهرامك حجمى $= \frac{1}{3}$ ع × $\frac{1}{2}$ رَ . ب . ﻫ
بولنور .



شكل ٥٠

ايمدى ﻫ اعظم نامتناهى اولنجه ب اصغر نامتناهى اولەجغندن قايەدە اهرام ، مخروطـه منقلب اولەرق رَ = ر ، ب . ﻫ = ٢ π ر اولمغـلە محللرينه وضع ايديلور و{٢٥،١ وتنبيه} دخى نظر مطالعەيە آلنەرق اصلاحات لازمه ياپيلورسه :

مخروط دورانينك مساحهٔ حجميەسى $= \frac{1}{3}$ π رَ٢ ع .... (١٩)

» » سطح مستديرى = π ر م .... (٢٠)

» » » خارجيسى = π ر (م + ر) .... (٢١)

بولنور .

الحاصل ارتفـاعى ع ، مولدى م ، قاعدتيننـك نصف قطرلرى ر، رَ اولان و وجهلرى نامتناهى اصغر شبه منحرفلردن عبارت بر اهرام ناقص كبى تصور اولنان بر مخروط ناقص دورانينك (شكل ـ ٥٠) كذلك ملاحظات سابقەيە عطفاً مساحهٔ حجميەسى $= \frac{1}{3}$ π (ر٢ + ر رَ + رَ٢) ع .... (٢٢)

سطح مستديرى = π (ر + رَ) م .... (٢٣)

« خارجيسى = π {ر (ر + م) + رَ (رَ + م)} .....(٢٤)

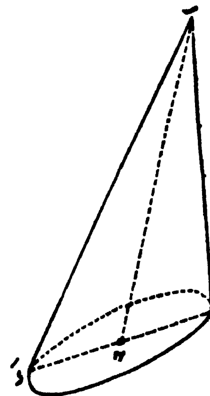
بولنه‌جغى سهولتله اكلاشيلور .

نتيجه: (١٩) نجى دستورك (١٦) دستوره نسبتندن عينى قاعده وارتفاعده بولنان مخروط، اسطوانه‌نك ثلثنه مساوى اولديغى تبين ايلر .

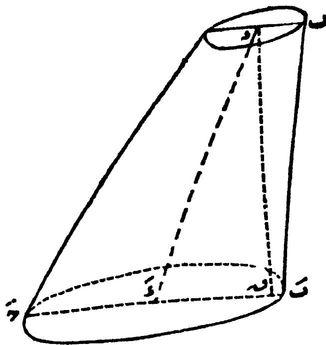
§ ٣٣)

تنبيهات

(١) : بالاده قسم مستقيمك كچديكى فرض اولنمش اولان ثابت نقطه سطح دائره‌نك مركزندن اخراج اولنان عمودك اوزرنده بولنمزسه قاعده‌سى دائره اولمق اوزره برمخروط مائل تولد ايلر وهر ايكى قاعده‌سى دائره اولديغى حالده مركزلرى بيننه موصول مستقيم دائره‌لره عمود اولمزسه



شكل ٥١



شكل ٥٢

مخروط ناقص مائل حصوله کلیر. (شکل — ٥٢،٥١) هر ایکیسنك مساحهٔ حجمیه‌سی (١٩) و(٢٢) نومرو ایله کوستریلن افاده‌لره تطبیقاً بولنـه‌جغی {٢١} ماده‌سی ملاحظه ایدیله‌رك حکم اولنور.

(٢)[غ٠م٠]: (١٤) ویا (١٥) نومرولی افاده‌لرده، اشکال مجسمه مخروط اولدیغنه نظراً، ے.ےَ، بے ویاب،ص یرینه‌مساویلری وضع اولنورسه ١٩و٢٢ مساواتی استحصال اولندیغی کوریلور.

(٣) : اسطوانه و مخروطلرك قاعده‌لری محیط دائره اولمیوب‌ده باشقه جنس منحنیدن تشکل ایتمش ایسه مساحهٔ حجمیه‌لری و دورانی اولدقلری تقدیرده سطح مستدیرلری ایچون کذلك بالاده‌کی دستورلر قوللانیلوب یالکز دائره و محیط دائره یرینه منحنیٔ معلومك محیط بولندیغی مساحهٔ‌سطحیه‌یی و طولنی وضع ایتمك اقتضا ایدر.

(٤): مخروط دورانینك هرمولدی عینی اولدیغندن سطح مستدیرینك برمولداستقامتنده‌انکشافی نصف قطری مولد مذکوردن‌عبارت‌اولمق‌وقوسی مخروط دورانینك قاعده‌سی محیطنك طولنه مساوی بولنمق اوزره بر قطاع دائره‌دن عبارت اولور. {(٢٠) نجی دستور ایله هـ . § ١٢٠ ، (٢) ، تنبیه مقایسه ایدلسون}

§ ١٣٣)

وظائف

ا) : ارتفاعلری مساوی اولان مخروطلرك نه ایله متناسب اولدیغنك؛

ب) : قاعده‌لرینك نصف قطرلری‌مساوی اولان مخروطنه ایله‌متناسب اولدقلرینك ارائه‌سی مطلوبدر.

ح) : (ا) و (ب) وظیفه‌لرنده فرض اولنان مخروطلرك اولاً : سطح مستدیرلری ، ثانیاً : سطح خارجیلری بیننده‌کی نسبتك نه اولدیغنی ارائه ایتمك مطلوبدر.

ء) : قاعده‌سنك نصف قطری تنصیف ایدیلن مخروطك حجمی قاچ دفعه کچولدیلمش اولور؟

ه) : ارتفاعی درت دفعه بیودیلن مخروطك حجمی اولکینك قاچ مثلی اولور ؟

و) : قاعده‌لرینك نصف قطرلری و ارتفاعلری $\frac{1}{2}$ نسبتنده اولان ایکی مخروطك بیننده‌کی نسبتك،

ز) : (ء) وظیفه‌سنده فرض ایدیلن ایکی مخروطك سطح مستدیرلری و خارجیلری نه نسبتده بولندیغنك ارائه‌سی ؛

ح) : (ز) وظیفه‌سنك (ه) مخروطلرینه نظراً ایفاسی،

ط) : » » (و) » » » مطلوبدر .

§ ٣٣ ، ب)

— مسائل —

١) : قاعده‌سی ٣ سم نصف قطرنده مقوادن، سطح مستدیری عادی کاغددن عبارت اولمق و مولدی ١ دم طولنده بولنمق اوزره بر مخروط دورانینك تشکیلی مطلوبدر.

٢) : قاعده‌سنك نصف قطری ٠،٢٥م وارتفاعی ٠،٧٥م اولان بر مخروط دورانینك مساحهٔ حجمیه‌سنی حساب ایتمك ؛

٣) : قاعده‌سنك قطری ٢،٧٠ م، ارتفاعی ٣،٢٠ م اولان بر مخروط

دورانینك اولاً: سطح مستدیرینك ، ثانیاً: سطح خارجیسنك مساحهٔ سطحیه‌سنی حساب ایتمك مطلوبدر .

٤) : ٥ سم قطرنده ، ٨ سم ارتفاعنده بر مخروط دورانی، قاعده‌سنه موازی اوله‌رق بو قاعده‌دن ٠٫٠٠٥م مسافه‌ده بر مستوی ایله قطع ایدلدیکی حالده حصوله کلن مخروط ناقص دورانینك بر مولد استقامتنده انکشافی مطلوبدر .

٥) : الت، اوست قاعده‌لرینك نصف قطرلری ٠٫٠٨٠م و٠٫٠٤٥م وارتفاعی ٠٫٠٧٠ م اولان بر مخروط ناقصك مساحهٔ حجمیه‌سنی ، سطح مستدیرینی وسطح خارجیسنی حساب ایتمك؛

٦) : سطح مستدیری ٣٢٫٠٣٧ م٢ وارتفاعی ٣٫٠٩ م اولان برمخروطك مساحهٔ حجمیه‌سیله سطح خارجیسنی حساب ایتمك ؛

٧) : قاعده‌سنك محیطی ایله مولدی ایکیشر دسیمتره اولان مخروط دورانینك مساحهٔ حجمیه‌سنی، سطح مستدیرینی وسطح خارجیسنی حساب ایتمك ؛

٨) : قاعده‌سنك قطریله ارتفاعی برر دسیمتره اولان مخروط دورانینك سطح مستدیرینی حساب ایتمك ؛

٩) : بر دکرمن بناسنك قطری ٦٫٠٧٥ م ، ارتفاعی ٥٫١٠ م اولوب ٢٫٨ م ارتفاعنه قدر اسطوانه وانك یوقاریسی مخروط شکلنده‌در. قاعده‌سی مستثنا اولمق اوزره سطح خارجیسنی ومساحهٔ حجمیه‌سنی حساب ایتمك ؛

١٠) : ٠٫١٥ م قطرنده صو ایله مملو اسطوانی برقابك درونته برآر‌ه‌ود غطس ایدلدیکی و بوحالده صویك تسویه‌سی ١٧ مم ترفع ایتدیکی [وهرقنغی برجسم مغطوس طرفندن چیقاریلان صویك مقداری

جسم مذكورك حجمنه مساوى اولديغى] معلوم ايكن آرمودك حجمنى حساب ايتمك ؛

١١) : ٠٥٢، . متره ضلعنده بولنان بر مكعبك داخلنه قاعده‌سنك قطرى ٠٠٤٣ م و ارتفاعى ٠٠٥١ م اولان بر مخروط وضع اولنديغى حالده آره‌ده قالان بوشلغك حجمنى حساب ايتمك ؛

١٢) : حجمى ١٠٠ م³، ارتفاعى قاعده‌سنك نصف قطرينه مساوى اولان بر مخروطك مولدينى، ارتفاعنى، قاعده‌سنك نصف قطرينى حساب ايتمك ؛

١٣) : بر مخروط ناقص ايله بر اسطوانه‌نك اتحادندن حاصل اولان بر خونينك حجمنى و سطح خارجيسنى حساب ايتمك مطلوبدر .

مخروط ناقصك ارتفاعى = ٠٠١٦
» » قاعده‌لرى = { ٠،١٩٥ ، ٠،١٦ } متره
اسطوانه‌نك ارتفاعى = ٠،٠٠٧٧

فرض اولنمشدر ؛

١٤) : مخروط ناقص شكلنده بولنان بر قابك

قاعدۀ فوقانيسى = ٠،٤٢
» تحتانيسى = ٠،٣٨ } متره

اولديغى حالده ٣٠ ليتره صو استيعاب ايده‌بيلمك ايچون ارتفاعى نقدر اولمق لازمدر ؟

١٥) : اسطوانه شكلنده ، ١٢ م عمقنده و ١٠٤٠ م نصف قطرنده بر قويونك $\frac{2}{3}$ مقدارى صو ايله طولودر . بر عمله مخروط ناقص شكلنده بر قوغه ايله صويى بوشالتمغه مأمور اولمشدر . صويك قوغه درونندەكى ارتفاعى ٠٠٢٠ اولوب قوغه‌نك قاعدۀ تحتانيسى ٠٠١٨ م وقاعدۀ فوقانيسى ٠،٢٤ قطرنده‌در . مرقوم عمله‌نك يوميه ١٥ غروش اجرتله ٨ ساعت چاليشديغى و ٢٠″ ده بر قوغه

صوچیقاردیغی وباشقه طرفدن قوییه صوکلدیکی معلوم ایکن ایشنی اکمال ایتدیکی وقت آله‌جغی نقدر اوله‌جقدر ؟

١٦) : حجمی ١٢ م٣ ، ارتفاعی ٣،٧٥ م اولان اسطوانه‌نك قاعده‌سنك قطرینی حساب ایتمك .

١٧) : سطح مستدیری ٣ م٢ ، مولدی ١٠٥ م اولان مخروطك حجمنی بولمق ،

١٨) : اسطوانه شکلنده برقله‌نك نصف قطرداخلیسی ١٠٣ م .دیوارینك مساحۀ مجمیه‌سی ٩٥ م٢ وثخنی ٠،٥ م اولدیغی حالده ارتفاعنی بولمق مطلوبدر .

باب ثالث

مبحث کره

§ ٣٤)

تعریفات

(١) : برنصف محیطك کندی قطری اطرافنده دوراننده تولد ایدن شکله « کره » وبونك دائراً مادار محاط اولدیغی سطح منحنی‌یه « سطح مستدیر کره » دینلورکه هرنقطه‌سی « مرکز » دینلن داخلی بر نقطه‌دن مساوی بعده‌ده‌در .

(٢): مرکزایله سطح مستدیر کره‌نك کافهٔ نقاطنه وصل اولنان اشبو

ابعاد متساویه‌نك هر برینه « نصف قطر کره » تعبیر اولنور .

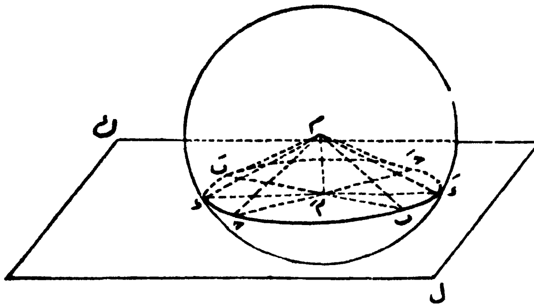
(٣) : نصف قطرلری مساوی اولان کره‌لر تماماً یکدیکرینه منطبق اوله‌بیله‌جکلرندن بر برینه مساویدرلر .

(٤) : مرکز کره‌دن کچوب کره سطح مستدیرینه منتهی اولان مستقیمه « قطر کره » دینلور .

§ ١٠٣٤)

دعوی : هر مستوینك کره ایله فصل مشترکی [مقطعی] بر دائره‌در .

مثلا (شکل — ٥٣) (ك ل) مستویسنك م کره‌سی ایله حاصل ایتدیکی ب ح ء بَ حَ ءَ فصل مشترکنك دائره اولدیغنی اثبات ایتمك ایچون م نقطه‌سندن (ك ل) مستویسنه م مَ عمودی اقامه واشبو عموددن کچمك اوزره برطاقم مستویلر فرض



(شکل ٥٣)

ومذکور مستویلرك (ك ل) مستویسیله حاصل ایده‌جکی مَ ب ، مَ ح ، مَ ء ، . . . . مثللو فصل مشترکلرك سطح مستدیر کره‌یی قطع ایتدکلری ب ، ح ، ء ، . . . . نقطه‌لریله م بینی وصل ایده‌لم .

م مَ ⊥ (ك ل) اولدیغی جهتله { ٣§ ، (٢) } موقعندن کچن مَ ب ، مَ ح ، مَ ء ، . . . . کبی بالجمله مستقیملره دخی عمود اولور .

ایمدی ب، ح، ء، بَ .... نقطه‌لری کره‌نك سطح مستدیری اوزرنده بولنمغله : { § ۳۴ ، (۲) } ب م = ح م = ء م = بَ م ..... اولوب حاصل اولان م مَ ب ، ممَ ح ، م مَ ء ، .... مثلث قائم الزاویه‌لری { هـ ، § ۲۷ ، تنبیه (۲) } مساوی وبناءً علیه مَ ب = مَ ح = مَ ء .... اولدیغندن ب ح ء بَ حَ ءَ مقطعی ، مرکزی مَ اولمق اوزره بردائره اولمش اولور .

تنبیه : مستویٔ مفروض مرکز کره‌دن کچرسه مقطعی : نصف قطری، کره‌نك نصف قطرینه مساوی اولان بردائره اوله‌جغی آشکاردر.

نتایج

(۱) : م مرکز کره‌دن مستویٔ قاطعه تنزیل اولنان عمود مقطع دائره‌وینك مرکزندن کچر .
(۲) : مقطعك مرکزیله م مرکز بینی وصل اولنان مستقیم مقطع مذکوره عمود اولور .
(۳) : مقطعك مرکزندن اقامه اولنان عمود مرکز کره‌دن کچر.

(§ ۳۴ ، ب)

تعریفات

(۱) : بر مستوی، کره ایله مقطعی اصفر نامتناهی اولورسه « مستویٔ مماس » نامنی آلیر . بو حالده مستوی ایله کره‌نك یالکز برر مشترك نقطه‌لری واردر . مرکز کره‌دن اشبو مستوی‌یه تنزیل اولنان

عمود {§ ٣٤ . ا ، نتيجه (١)} ه كوره نقطهٔ تماسدن و نقطهٔ تماسده مستوی‌یه اقامه اولنان عمود {نتيجه (٢)} يه نظراً مركز كره‌دن كچر .

(٢) : مركز كره‌دن كچن دائره‌نك نصف‌قطری (شكل—٥٣) م مَ حـ مثلثو برمثلث قائم‌الزاويه‌نك وترقائمه‌سنه مساوی اولديغندن دائرهٔ‌مذكوره مركز كره‌دن كچميان بالجمله دوائر سائره‌نك هر برندن بيوكدر . بوكا مبنی مركز كره‌دن كچن دائره‌لره « كره‌نك دوائر عظيمه‌سی» ومركز كره‌دن كچميانلره « كره‌نك دوائر صغيره‌سی » تسميه اولنور .

(٣) : بر دائرهٔ عظيمه ويا صغيره‌يه عمود اولان قطر كره‌نك ايكی نهايت نقطه‌سنه مذكور دائره‌نك « قطبلری » دينلور . بربرينه موازی اولان دائره‌لرك قطبلری عينيدر . عينی قطبه مالك اولان دائره‌لر « دوائر متوازيه » وقطب نقطه‌لرندن كچن دوائر عظيمه‌يه « نصف‌النهار دائره‌لری » نامی ويريلور . نصف النهار دائره‌لريله‌دوائر متوازيه يكديكرينی عموداً قطع ايدرلر .

(٤) : دوائر عظيمه عينی نصف قطرده اولديغندن يكديكرينه مساويدر . دوائر عظيمهٔ متلاقيه‌نك فصل مشتركلری ، مركزمشتركلرندن كچديكندن ، يكديكرينی تنصيف ايدرلر .

(٥) : هردائرهٔ عظيمه كره‌يی سطحاً وحجماً ايكی مساوی قسمه تقسيم ايدر . چونكه مذكور قسملر يكديكرينه تماماً منطبق اولور .

(٦) : سطح مستدير كره اوزرنده واقع كيفی ايكی نقطه ايله مركز كره‌دن {§ ١ ، (٥)} دائما ويالكز برمستوی كچه‌جكندن مذكور ايكی نقطه‌دن دائما ويالكز بردائرهٔ عظيمه كچر .

(٧) : سطح مستدیر کره اوزرنده واقع کیفی اوچ نقطه‌دن {§ ٦، (٥)} دائما ویالکز بر مستوی کچه‌جکندن مذکور اوچ نقطه‌دن دائما ویالکز بر دائره کچر .

(٨) : ایکی دائرهٔ عظیمه قوسی آره‌سنده‌کی « زاویهٔ کرویه » ، مذکورقوسلرك نقطهٔ تلاقیلرندن کندیلرینه رسم اولنان ایکی مماس آره‌سنده بولنان زاویهٔ مستویه ایله وتعبیر دیکرله قوسلرك عائد اولدقلری ایکی دائرهٔ عظیمه مستویسنك مقیاس زاویه‌سیله تقدیر اولنور .

(٩) : بر مستقیم ، کره سطح مستدیرنی یالکز ایکی نقطه‌ده قطع ایلر . چونکه اشبو مستقیمدن بر مستوی امرار ایدیله‌بیلوب مستوینك کره ایله فصل مشترکی {§ ٣١ ، ١} دائره اولمغله بو دائره‌نك ، سطح مستدیر کره اوزرنده بولنان محیطی مستقیم واسطه‌سیله {ه . § ٦٠ ، تنبیه} یالکز ایکی نقطه‌سنده قطع ایدیله‌بیلور .

(١٠) : کره ایله یالکز بر نقطه‌سی مشترك اولان مستقیمه « کره‌نك مستقیم مماسی » دینلور . اشبو مستقیم مماس ، کندیسیله مرکز کره‌دن کچن مستوینك کره ایله مقطعی اولان دائرهٔ عظیمه‌یه دخی مماس اولدیغندن مرکز کره ایله نقطهٔ تماس بیننه وصل اولنان مستقیمك مستقیم مماسه عمود اولدیغی ودائرهٔ عظیمه داخلنده اولمق اوزره نقطهٔ تماسده مستقیم مماسه عمود اولان مستقیمك مرکز کره‌دن کچدیکی اکلاشیلور .

(١١) : (شکل - ٥٤) ح ء ه ، ح ء ه نصف دائره‌لریله ء ح
١ ١ ١ ١

ه ج مماس مشترکلرینی و (ب ه) یه موازی اولان ءَ ءً ایله، عمود بولنان ه ءً مماسلرینی نظر مطالعه‌یه آلهلم. ح ء ه، ح ء ه نصف دائره‌لرینك ب ه محوری اطرافنده دوراننده کره‌لر تولدایدوب ء ج ، ه ج ، ءَ ءً ، ه ءً مماسلری ایله ه ی ، ج جَ ، جَ ج م ء عمودلری هر وضعیتده مماس و عمود اوله‌رق نصف دائره‌لر ایله برابر دور ایدرلر. ء ج مستقیمی قاعده‌تینك نصف قطرلری ج جَ ، ء ءَ اولمق اوزره بر مخروط ناقص دورانی؛ ه ج مستقیمی رأسلری ب اولمق اوزره رأساً مقابل [متناطر] ایکی مخروط دورانی؛ ءَ ءً مستقیمی قاعده‌سنك نصف قطری م ء اولمق اوزره بر اسطوانهٔ دورانیه؛ ء ءَ ، ه ی ، ج جَ ، ج جَ ، م ء ، ه ءً مستقیملری بر ر مستوی و

شکل ٥٤

ء نقطه‌سی نصف قطری ء ءَ اولمق اوزره بر دائرهٔ صغیره
ه » » » » ه ی » » »
ج » » » » ج جَ » » »
ج » » » » ج جَ » » »
ء » » » » م ء = م ه » » عظیمه

تولیدایلرلرکه بر کره‌نك خار-

جنده واقع بر نقطه‌دن رسم اولنان مماسلرك محل هندسیسی برمخروط دورانی
وعینی برقطرینه موازی « « « « « « اسطوانهٔ «
وایکی کره‌یه رسم اولنان مماس خارجیلرك محل هندسیسی برمخروط ناقص دورانی؛
« « « « داخلیلرك « « رأسی مرکزلر مستقیمنده
اولمق اوزره ایکی مخروط دورانیٔ متناظر اولدیغی شکلك مطالعه‌سندن
آکلاشیلور .

(۱۲) : کره‌لرك یکدیکرینه نظراً وضعیتلری و بو وضعیتلرده نصف
قطرلرینك احوالی {هـ. § ٦٧,(۱):(٥)} ده دائره‌لر حقنده بیان ایدیلنلرك
عینی اولدیغندن بوراده تکرارندن صرف نظر اولنمشدر.

(۱۳): رأسی مرکز کره‌یه موضوع برزاویهٔ مجسمه‌نك وجهلری واسطه‌
سیله سطح مستدیر کره اوزرنده، اضلاعی دوائر عظیمه قوسلرندن عبارت
اولمق اوزره بر شکل کثیر الاضلاع کروی حاصل اولور . زاویهٔ مجسمه
اوچ وجهلی ایسه تولید ایده‌جکی شکل بر « مثلث کرویدن » عبارت
اولور .

(۱٤) : ۞ ضلعلی محدب هر ذو کثیر الاضلاع کروینك ضلعلرندن
بری {§۱٥٠تنبیه} اضلاع متباقیه‌نك مجموعندن و مجموع اضلاعی {§۱٦}درت
قائمه‌دن کچوك و زوایاسنك مجموعی ایسه (۲ ۞ ـ ٤) قا دن بیوکدر .

(۱٥): § (۱۷)نجی ماده‌ده زوایای مجسمه حقنده بیان ایدیلن مطالعات
ایله اوچ وجهلی زاویهٔ مجسمه ایچون مادهٔ مذکوره‌نك (٤:۱) نومرولی
شرائطی و {§۱٥} دعواسی، اشکال کثیرة الاضلاع کرویه ایله مثلث کروی
حقنده دخی جاریدر.

(۱٦): سطح مستدیر کره اوزرنده بولنان هر قنغی بر خط منحنی ،

دوائر عظیمه‌نك غایت كچوك قوسلرندن تركب ایتمش كبی نظر مطالعه‌یه آلنه‌جقندن بر دائرۀ عظیمه محیطنك، ایكی نقطه‌سی آره‌سنده بولنان و نصف محیطندن كچوك اولان بر قوسی، سطح مستدیر كره اوزرنده مذكور ایكی نقطه آره‌سنه وصلی تصور ایدیلان سائر خطوط منحنیه‌نك اقصری اولدیغی اكلاشیلور.

(١٧) : بر مستوی، كره‌یی «قطعۀ كره» تعبیر اولنان و كره سطح مستدیرینی «طاقیۀ كره» دنیلن ایكی پارچه‌یه آییرر. اكر مستوی مركزدن كچرسه قطعۀ كره‌لردن هر بری «نصف كره» وطاقیه‌لر برر «نصف مستدیر كره» اولور. ایكی مستوی آره‌سنده بولنان كره قسمنه «منطقه» تعبیر اولنور. بر قطاع دائره‌نك نصف قطرلردن بری اطرافنده دوری تصور اولندقده «قطاع كره» نامنی آلان جسم تولد ایدر.

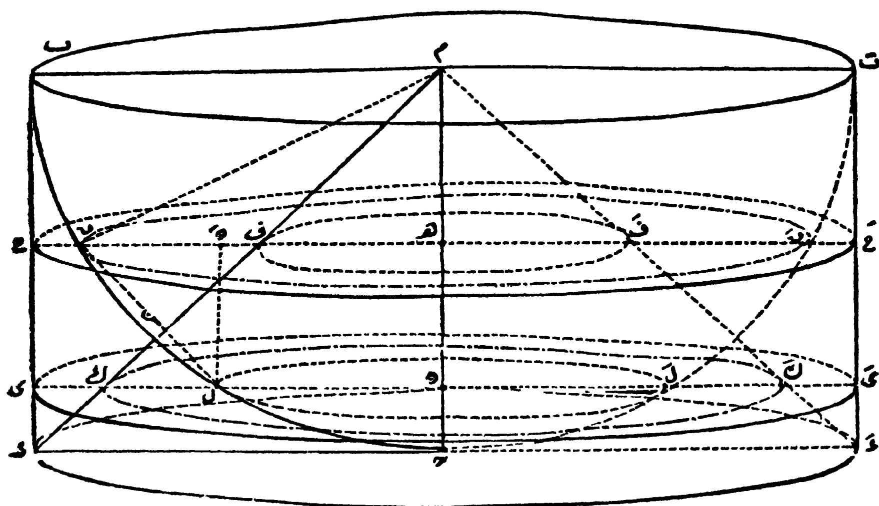
كره واقسامنك مساحه‌لری

(§ ٣٥)

اول امرده (شكل -- ٥٥) : (دحمب) مربعنك، (دم) قطرینك و (بح) ربع دائره‌سنك مح محوری اطرافنده دورینی تصور ایده‌لم. اثنای دورده مذكور شكللردن مبحد مربعی {§٣١} بر اسطوانۀ دورانیه؛ مدح مثلث قائم الزاویه‌سی {§٣٢} بر مخروط دورانی؛ بح ربع دائره‌سی بر نصف كره‌یی تولید ایدوب مدب مثلثی واسطه‌سیله تولد ایدن و« فضل

جسمہ تعبیر اولنان جسم ایسه مربعك تشکیل ایلدیکی اسطوانه ایله م ج د مثلثنك احداث ایتدیکی مخروط بیننده‌کی فضلدن عبارت اولدیغی آشکاردر.

ایمدی هـ ح ⊥ م ج اولورسه (هـ ٥١ § ٥١) هـ و^٢ = م و^٢ — م هـ^٢ اولوب



شکل ٥٥

م و ، ب ج ربع دائره‌سنك نصف‌قطری و $\frac{م هـ}{هـ ف} = \frac{م ج}{ج د} = ١$ اولمغله م و = م ب = هـ ح ، م هـ = هـ ف اولدیغندن محلنه‌وضع و طرفین π ایله ضرب اولندقده :

$$\pi\ هـ و^2 = \pi\ هـ ح^2 - \pi\ هـ ف^2$$

اولورکه اشبو مساواتك طرف اولی هر قنغی بر هـ نقطه‌سندن کچه‌رك م ج نصف قطرینه عمود اولان بر مستوینك نصف کره ایله وطرف ثانیسی مستوئ مذکورك فضل‌جسم ایله [مقطعندن] حاصل ایتدیکی فصل مشترکدن عبارتدر. بو حالده م ب دائرۀ عظیمه‌سندن عینی ارتفاعده بولنان نصف

کره وفضل جسمك مقطعلری یکدیکرینه مساوی اولدیغی بو وجهله تحقق ایتدیکندن {§ ۲۱} حجملری دخی بربرینه مساوی بولندیغی اکلاشیلمش اولور. حالبوکه عینی قاعده و ارتفاعده بولنان مخروط {§ ۳۲ ، نتیجه} اسطوانه‌نك ثلثی اولمغله:

نصف کره = فضل جسم = اسطوانه — مخروط ∴
نصف کره = اسطوانه — ($\frac{1}{3}$) اسطوانه
= $\frac{2}{3}$ اسطوانه

بولنور. کره‌نك نصف قطری r ومساحهٔ حجمیه‌سی V ایله کوسترلسه شکل سابقه نظراً:

اسطوانه‌نك مساحهٔ حجمیه‌سی $= \pi r^2 \cdot r = \pi r^3$ اولوب
نصف کره‌نك » » $= \frac{2}{3} \cdot \pi r^3$ اولمغله
$V = \frac{4}{3} \pi r^3$ .... (۲۵) بولنور.

تنبیه (۱) : ارتفاعلری قاعده‌لرینك قطرینه ($=2r$) مساوی اولمق اوزره بر اسطوانه وبر مخروط ایله قطری ینه ($2r$) یه مساوی اوله‌رق برده کره رسم اولنسه مخروطك، کره و اسطوانه‌یه نسبتی

۱ : ۲ : ۳

کیدر.

(۲) : کره‌نك قطرینی d ایله کوستروب r یرینه $\frac{d}{2}$ وضع ایلرسه‌ك

$V = \frac{1}{6} \pi d^3$ .... (۲۵َ) بولنور.

§ ۳٦)

دهدهَ مستویسیله تشکیل ایدیلان و ارتفاعی ح هـ = ع دن عبارت بولنان قطعهٔ کره‌نك حجمی دهدهَ ، ءءَ مستویلری آره‌سنده‌کی فضل جسمك حجمنه [قاعده‌لری معادل، ارتفاعلری عینی اولدیغندن] مساوی اولوب ݣَ ایله کوستریلورسه :

ݣَ = فضل جسم (ء ح ف فَ حَ ءَ)

= اسطوانهٔ (ء ح حَ ءَ) — مخروط ناقص (ء ف فَ ءَ) اولوب

ف هـ = م هـ = ر — ع   اولمغله

ݣَ = π ر^{2} ع — $\frac{1}{3}\pi$ ع { ر^{2} + ر (ر — ع) + (ر — ع)^{2} }

بولنور. اصلاح اولندقده : ارتفاعی ع اولان بر قطعهٔ کره‌نك مساحهٔ حجمیه‌سی:

ݣَ = $\frac{1}{3}\pi$ ع^{2} (۳ر — ع) .... (۲٦)

بولنمش اولور .

§ ۳۷)

دهدهَ، ل لَ مستویلری آره‌سنده بولنان و ارتفاعی هـ ه = ع اولان منطقهٔ کره ݣَ ، بر قاعده‌سنك هـ ده نصف قطری ب ، دیکرینك ه لَ نصف قطری ح ایله کوستریلدکده :

ݣَ = فضل جسم (ك ى ح ف فَ حَ ىَ كَ)

= اسطوانهٔ (ى ح حَ ىَ) — مخروط ناقص (كَ ف فَ كَ)

= π ر² ع − ⅓ π ع (هك² + هك . هف + هف²) اولور.

ه ك = ه م . ه ف = ه م اولديغندن

حَ = π ر² ع − ⅓ π ع (هم² + هم . هم + هم²)

بولنوب آتيده‌كى شكله وضع اولندقده:

حَ = π ر² ع − ⅙ π ع (٣ هم² − هم² + ٢ هم . هم + ٣ هم² − هم²) ∴

حَ = π ر² ع − ⅙ π ع {٣ هم² + ٣ هم² − (هم − هم)²} اولور.

حالبوكه هم² = ر² − ح² ، هم² = ر² − ب² ؛ هم − هم = ع اولمغله محللرينه قونيلوب اصلاح ايدلدكده: ارتفاعى ع اولان منطقهٔ كره‌نك مساحهٔ حجميه‌سى

حَ = ⅙ π ع (٣ ب² + ٣ ح² + ع²) ..... (٢٧)

بولنور.

§ ١٠٣٧)

اكر مذكور منطقهٔ كره حجمندن (ل وه وَ لَ) مخروط ناقصنك حجمى طرح ايديلورسه وترى ل وه = س اولان برقوس دائره‌نك دوراندن حاصل اولان بر جسمك مساحهٔ حجميه‌سى بولنور. اشبو حجمى ح١ ايله كوستريرسه‌ك.

$$\text{حـ}_{۱} = \text{حـ} - \text{مخروط ناقص}\ (\text{ل و ه و َ ل َ})$$

$$= \frac{۱}{۶}\pi\,\text{ع}\,(۳\text{ب}^{۲} + ۳\text{د}^{۲} + \text{ع}^{۲}) - \frac{۱}{۳}\pi\,\text{ع}\,(\text{د}^{۲} + \text{ب}\text{د} + \text{ب}^{۲})$$

$$= \frac{۱}{۶}\pi\,\text{ع}\,\{(\text{ب} - \text{د})^{۲} + \text{ع}^{۲}\}$$

$$= \frac{۱}{۶}\pi\,\text{ع}\,(\overline{\text{وه}}^{۲} + \text{ع}^{۲})$$

اولوب بناءً علیه :

$$\text{حـ}_{۱} = \frac{۱}{۶}\pi\,\text{ع}\,\text{س}^{۲} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۲۸)$$

اولمش اولور .

(۲۶) نومرولی دستور نصف کره‌دن بیوك اولان قطعهٔ کره‌لر ایچون دخی جاری و (۲۷) و (۲۸) دستورلری عینی وجهله عمومیدر .

س = ع حالنده یعنی ر نصف قطرنده بر کره‌نك داخلنده مرسوم اولان وارتفاعی (ع) ، مساوی بولنان براسطوانه‌نك ظرفندن عبارت‌یوزوك شکلنده‌کی جسمك مساحهٔ حجمیه‌سی : $\text{حـ}_{۱} = \frac{۱}{۶}\pi\,\text{ع}^{۳}$ اولورکه نصف قطره غیر تابع اولوب قطری ع اولان برکره حجمنه مساوی دیمکدر.

§ ۳۸)

ه م ق ه د قطاع کره‌سی = قطعهٔ کرهٔ وه ق ه د + مخروط م ه و ق اولدیغی شکلك مطالعه‌سندن اکلاشلمقده اولوب اگر ه د = ع وقطاع مذکورك مساحهٔ حجمیه‌سی $\text{حـ}_{۲}$ فرض اولنورسه :

$$\text{حـ}_{۲} = \frac{۱}{۳}\pi\,\text{ع}^{۲}(۳\text{ر} - \text{ع}) + \frac{۱}{۳}\pi\,\overline{\text{هو}}^{۲}\,.\,\text{م ه}$$ اولور .

$\text{هو} = \text{ب} \,;\, \overline{\text{هو}}^{٢} = \overline{\text{مو}}^{٢} - \overline{\text{مه}}^{٢} \;\therefore\; \text{ب}^{٢} = \text{ر}^{٢} - (\text{ر} - \text{ع})^{٢}$ اولمغله

$$\text{ح}_{٢} = \frac{١}{٣}\,\pi\,\text{ع}^{٢}\,(٣\text{ر} - \text{ع}) + \frac{١}{٣}\,\pi\,(\text{ر} - \text{ع})\,\{\text{ر}^{٢} - (\text{ر} - \text{ع})^{٢}\}$$

اولوب اصلاح اولندقده ، $\text{ع} > \text{ر}$ ایچون دخی جاری اولمق اوزره قطاع دائره حجمی ایچون :

$$\text{ح}_{٢} = \frac{٢}{٣}\,\pi\,\text{ر}^{٢}\,\text{ع} \quad \ldots\ldots \quad (٢٩)$$

دستوری بولنمش اولور .

§ ٣٩)

قطاع کره ، رأسلری م نقطه‌سنده وقاعده‌لری [اصغر نامتناهی فرض اولنه‌رق] و ح وَ طاقیه‌سنده بولنمق اوزره اعظم نامتناهی عددده، اهراملردن مرکب اولدیغنی فرض وقبول ایده‌لم . اهراملردن هر برینك اصغر نامتناهی اولان قاعده‌سنی وه وبوقاعده‌لرك مجموعنی یعنی طاقیه‌نك سطح مستدیرینی ح ایله کوستریرسه‌ك اهرام مفروضلردن برینك مساحهٔ حجمیه‌سی {§ ٢٥} $= \frac{١}{٣}\,\text{ر}\,\text{وه}$ اولوب تکمیل اهراملرك مساحهٔ حجمیه‌لری مجموعی $\frac{١}{٣}\,\text{ر}\,\text{ح}$ اوله‌جغندن واهراملرك مساحهٔ حجمیه‌لری مجموعی بر موجب فرضیات قطاع کره‌نك حجمنه مساوی اولدیغندن :

$$\frac{١}{٣}\,\text{ر}\,\text{ح} = \frac{٢}{٣}\,\pi\,\text{ر}^{٢}\,\text{ع}$$

اولمغله ح حل اولندقده طاقیه سطح مستدیرینك مساحهٔ سطحیه‌سی :

ح = ٢ π ر ع .... (٣٠)

اولمش اولور .

§ ٤٠)

برينك ارتفاعى عَ، ديكرينككى عً اولان ايكى طاقيه‌نك بينن‌ده‌كى فضلى آليرسه‌ق ارتفاعى (عً — عَ) اولان بر منطقه سطح مستديرينك مساحهٔ سطحيه‌سى بوانه‌جغندن مذكور ارتفاع يعنى منطقه‌يى تحديد ايدن ايكى موازى مستوى آره‌سنده‌كى بعد عَ و منطقهٔ كره سطح مستديرى حَ ايله كوستريلورسه

ح َ = ٢ π ر عَ .... (٣١)

بولنور .

عَ = ر حالنده طاقيه‌نك سطح مستديرى بر نصف كره سطح مستديرينه منقلب اوله‌جغندن (٣١) نجى دستور ٢ π ر² شكلنى آلمش اولمغله كره سطح مستديرينك مساحهٔ سطحيه‌سى حً ايله كوسترلدكده :

حً = ٢ π ر² .... (٣٢)

واشبو دستورى حً = (٢π ر)² / ٢π حالنه وضع ايتمك ممكن اولديغندن نصف قطرى ر اولان كره‌نك دائرهٔ عظيمه‌سى محيطنه مساوى اولان ٢π ر افاده‌سى (ك) فرض اولنورسه سطح مستدير مذكور :

حً = ك² / ٢π .... (٣٢َ)

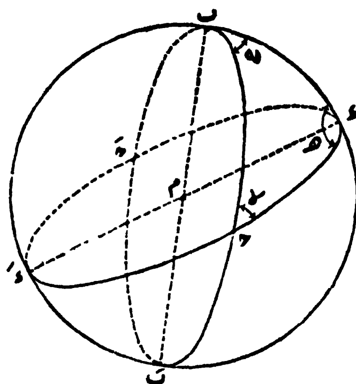
اولمش اولور .

§ ٤١) [غ.م.]

٢٥ : ٢٩ نومرولی دستورلر {§ ٣٠.(٤١)}نه تطبیقاً دخی بولنه بیلور.

§ ٤٢)

ایکی نصف دائرهٔ عظیمه آره سنده بولنان سطح کره پارچه سنه «دلم کره» دینلور .



شکل ٥٦

ح ایله نصف کره سطح مستدیری ، حَ ایله دلم کره سطحی؛ لاَ ایله دلمی احداث ایدن نصف دائرهٔ عظیمه قوسلری آره سنده کی زاویه کوستریلورسه :

---

[*] کره نك ، هر قنغی بر نصف دائره نك محوری اطرافنده دورندن ، تولد ایلدیکی معلومدر. (شکل — ٥٧) (ب)دن(ی)ه طوغری ویه ب لك نصف دائره سنك دورینی

(شکل-٥٦) ب ج د کیفماتفق برمثلث کروی ؛ ه ، لا ، هـ زاویه‌لری ؛ Δ مساحهٔ سطحیه‌سی اولسون .

ب ج جَ د ب ، ج د جَ ب ج ، د ب دَ ج د دلم کره‌لری مجموعی مثلث کروینك ضعفیله ح نصف کره سطحی مجموعنه مساوی اولدیغی آشکار اولمغله بوحالده :

ب ج جَ د ب + ج د جَ ب ج + د ب دَ ج د = ٢Δ + ح

اولوب دلم کره‌لر یرینه (٣٣) نجی دستوره نظراً مساویلری وضع اولندقده

$$ح + Δ٢ = ح\frac{هـ}{٢ قا} + ح\frac{لا}{٢ قا} + ح\frac{ه}{٢ قا}$$

اولمغله اصلاح ایدیلورسه

تعقیب ایده‌لم . اشبو نصف دائره مستویسی ب م حـ مثللو مستوین زاویه‌لرینی ومحیطی و ه ب ك حـ کبی دلم کره‌لری تولید ایتمکده‌در . مستویٔ مذکور یکدیکرینه مساوی ب م ج : ج م د مستوبین زاویه‌لرینی تشکیل ایتدیکی تقدیرده محیطك رسم ایلدیکی و ه ب ك حـ ؛ و ه حـ ك د دلم کره‌لری دخی یکدیکرینه مساوی بولنور . چونکه زاویه‌لر یکدیکریسه تطبیق ایدیله‌جك اولورسه دلم کره‌لرده بربرینه منطبق اولور . بناء علیه ب م حـ زاویه‌سی ب م د زاویه‌سنك ضعفی ایسه و ه ب ك حـ دلم کره‌سی دخی و ه ب ك د دلم کره‌سنك ضعفنه مساوی اولدیغی تحقق ایدر . بو وجهله دوام ایدیله‌رك دلم کره‌لرك سطحلری مستوین زاویه‌لریله متناسب اولدقلری اکلاشیلمش اولور .

شکل ٥٧

$$\Delta = \frac{ن + لا + هـ - ٢ قا}{٤ قا} \cdot ح$$

وياخود زاويهٔ قائمه‌لر مثلثاتده اولدیغی کبی π حرفیله کوسترلدکده .

$$\Delta = \frac{ن + لا + هـ - \pi}{٢ \pi} \cdot ح \quad \cdots\cdots\cdots (٣٤)$$

بولنمش اولور .

§ ١٠٤٢)

وظائف

ا) : (٩) دستورینی قوللانه‌رق حجم کره‌یی بولمق ،
ب) : » » » قطعهٔ کره‌نك حجمنی » ،
ج) : » » » منطقهٔ » » » ،
د) : نصف قطری مختلف اولان کره‌لرك حجملری نه ایله متناسب اولدیغنك ؛
هـ) : عینی برکره‌ده قطاع کره‌لرك حجملری نه ایله متناسب اولدیغنك ،
و) : نصف قطرلری مختلف اولان کره‌لرك سطح مستدیرلری ایله متناسب اولدیغنك ،
ز) : عینی برکره‌ده طاقیه‌لر نه ایله متناسب اولدیغنك ،
ح) : » » منطقه‌لر » » » ارائه‌سی مطلوبدر .

§ 42 ، ب)

مسائل

١) : نصف قطری ٢٠٠٥ م اولان بر کره‌نك مساحهٔ حجمیه‌سنی حساب ایتمك مطلوبدر .

٢) : سطح مستدیری ٥ م٢ اولان کره‌نك حجمنی حساب ایتمك ؟

٣) : نصف قطرینك اوج مثلی‌النان کره‌نك حجمی وسطح مستدیری نه نسبتده بیور ؟

٤) : بر کره‌نك بش متره طولنده اولان نصف قطرینك منتصف نقطه‌سندن قائماً کچن برمستوینك کره ایله حاصل ایلدیکی مقطعك مساحهٔ سطحیه‌سنی حساب ایتمك ؛

٥) : قطری اوج متره اولان بر کره‌ده ١٢٥ م ارتفاعنده‌کی منطقه‌نك مساحهٔ سطحیه‌سنی حساب ایتمك ؛

٦) : برکره منطقه‌سنك ارتفاعی برمتره وسطحی ٢٠٥٠ م٢ متره اولدیغی معلوم ایکن کره‌نك مساحهٔ حجمیه‌سنی حساب ایتمك ؛

٧) : ارضك تام بر کره اولدیغی فرضنه و نصف النهار دائره‌سنك (برداٸرهٔ عظیمه‌سنك) قرق میلیونده بر جزئی بر متره اعتبار اولندیغنه نظراً کیلومتره مربعی جنسدن سطح مستدیرینی وکیلو- متره مکعبی اوله‌رق حجمنی بولمق مطلوبدر .

٨) : نصف قطری ٢ م اولان بر کره‌نك مرکزندن اعتباراً هر قنغی برنصف قطری اوزرنده برنقطه تعیین ایتمك مطلوبدرکه بونقطه‌دن نصف قطر مذکوره عموداً کچه‌جك مستوینك کره ایله مقطعی

دائرهٔ عظیمه‌نك ربعنه مساوی اولسون .

٩) : قطری ٥ م اولان کره‌نك سطح مستدیرینی حساب ایتمك } مطلوبدر.
١٠): حجمی ٦ م٣ « « « « « « « }

١١): برمکعبك داخلنده‌رأسلرندن ووجهلرندن ابعاد متساویه‌ده برنقطه بولنه‌بیله‌جکی جهتله مذکور مکعبك خارجنه ویا داخلنه بر کره رسم ایتمك ممکن اوله‌جغی آشکاردر . مکعبك برضلعی ٢ م اولدیغنه نظراً مذکور ایکی کره‌نك حجملرینی حساب ایتمك وحجملری بینند‌ه‌کی نسبتی بولمق ؛

١٢): قاعده‌سی نصف قطری ٢ م اولان وسطح خارجیسی ٣ م نصف قطرنده بر کره‌نك سطح مستدیرینه معادل بولنان اسطوانه‌نك ارتفاعنی حساب ایتمك ؛

١٣): بر کره‌ده سطحی بر دائرهٔ عظیمه سطحنه مساوی اولان برمنطقه‌نك ارتفاعنی حساب ایتمك ؛

١٤): دائرهٔ‌عظیمه‌سی محیطی ١٥.٧٥ م اولان برکره‌نك سطح‌مستدیرینی حساب ایتمك ؛

١٥): سطح مستدیری بر متره مربعنه مساوی اولان کره‌نك نصف قطرینی حساب ایتمك ؛

١٦): برضلعی ٣،٣٥ م اولان برمکعبك سطح خارجیسنه مساوی سطح مستدیری حاوی اوله‌جق کره‌نك نصف قطرینی ؛

١٧): قمرك قطرینك کرهٔ ارضك قطرینه نسبتی $\frac{٣}{١١}$ اولدیغی معلوم ایکن قمرك سطح مستدیرینی وحجمنی ؛

١٨): محیطی ٢،٤٠ م ونصف کره شکلنده بولنان بر حوضك مقدار استیعابیه‌سنی؛

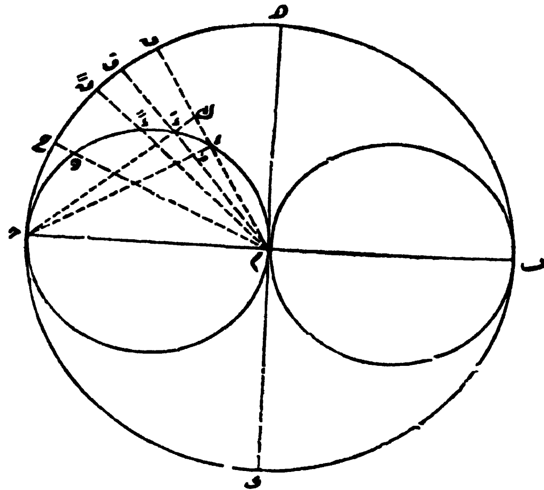
١٩): نصف قطری بر دسیمتره و نصف کره شکلنده بولنان بر قاب

داخلنه غیرمنتظم بر جسم وضع اولنه‌رق صو ایله املا اولنمشدر. مؤخراً جسم قالدیریله‌رق قابك طولمسی ایچون لازم کلن صویك مقداری وزن اولندقده یاریم لیتره بولنمشدر. بومعلوماته استناداً غیر منتظم جسمك حجمنی بولمق مطلوبدر.

۲۰): ارتفاعی ۹,٦۰ م اولان بر مخروطی . قاعده‌سنه موازی بر مستوی واسطه‌سیله قطع ایتدیکمز حالده ایکی حجم حصوله کلیر. اشبو ایکی حجمك یکدیکرینه مساوی اولمسی ایچون مستوی قاطع قاعده‌دن نه قدر ارتفاعده بولنمق اقتضا ایدر ؟

§ ٤۳) [غ . م .]

مسئله : (شکل — ٥۸) بر کره‌نك ﻫ ح ی ب دائرهٔ عظیمه‌سنه قائماً واقع اولان و قاعده‌لرینك قطرلری (م ب ، م ح) دن عبارت اولوب م نقطه‌سندن ، دائرهٔ عظیمهٔ مذکوره‌یه عموداً ، کچن قطر کره استقامتجه مماس بولنان ایکی اسطوانه‌نك سطح مستدیر کره‌دن افراز ایلدیکی درت پارچه ایله سطح مستدیر مذکورك متباقی قسمنی حساب ایتمك مطلوبدر.



شكل ٥٨

مركز كره‌دن كچمك و مذكور اسطوانه‌لرك محورلرينه موازى، عمود ومنطبق اولمق ويكديكرينه‌ده عمود بولنمق اوزره اوچ مستوى تصور ايده‌لم. اشبو اوچ مستوى ، كره‌يى هر برينه « ثمن كره » دينلن سكز مساوى پارچه‌يه تقسيم ايدركه اسطوانه‌لرك محورلرينه‌عمود اولان مستوينك، مذكور اسطوانه‌لر و كره ايله مقطعى (شكل ــ ٥٨)ده كوسترلمشدر. ايمدى هرقنغى بر م وه مستقيمندن كچمك اوزره م هـ ح مستويسنه عمود بر مستوى تصور ايده‌لم. (شكل ــ ٥٩) اشبو مستوينك ثمن كره ايله [(م ح هـ) نك فوقنده‌كى] فصل مشتركى م وه ے س ربع دائره‌سندن و نصف اسطوانه ايله [(م ى ح) ك اوستنده‌كى] فصل مشتركى م س، ے ى مستقيملرندن عبارت اولديغى كورلمكده‌در. (شكل ــ ٥٨ و ٥٩) م ح = م وه ؛ م ى = م ى اولديغندن { هـ . § ٢٧ . تتميه }Δ م ے ى ≅ م ى ح اولمغله ح م̂ ى = ى م̂ ے وبناءعليه قوس وه ے =

قوس ه ح بوانورکه بو واسطه ایله ثمن کره‌نك سطح مستدیری اوزرنده
اسطوانه‌نك مقطعندن عبارت اولان منحنینك حدودینی رسم ایتمك قولایدر.
بوندن باشقه‌ده ب ء = ح ء اولدیغی آشکاردر. اول امرده ء ط ح ه مستویسنه

شکل ٥٩

قائماً موضوع اولان ب ك ح ه سطح کره قسمنی تعیین ایده‌لم. ء ط ح ه
مستویسی اصغر نامتناهی اکسنز تصور ایدیلن ء ءَ هَ ه ، ءَ ءً هً هَ ، . . . . .
پارچه‌لرندن و (ب ك ح ه) سطح کره‌سی مذکور پارچه‌لره عائد اولان
ب بَ هَ ه ، بَ بً هً هَ ، . . . . قسملرندن ترکب ایتمکده اولدیغی کورلمکده‌در.
ایمدی م ءَ نصف قطریله م ه مستقیمنی ك نقطه‌سنده قطع ایتمك اوزره م
مرکزی اطرافنده برمحیط دائره‌نك رسم اولندیغنی واشبو دائره‌نك محیطندن
ب هـ ح ی دائرهٔ عظیمه‌سنه قائماً براسطوانه سطحنك مرور ایتدیکنی فرض
و قبول ایده‌لم. اشبو اسطوانه‌نك، کره ایله [دائرهٔ صغیره شکلنده حاصل
ایتدیکی] مقطعی و (ب هـ ح ی) دائرهٔ عظیمه‌سی آره‌سنده ، ارتفاعی
(بَ ءَ) نه مساوی اولان برمنطقهٔ کره تولد ایدوب بونك سطح مستدیری
{ § ٤٠ ، (٣١) } = ٢ π ر . بَ ءَ اولور. اکر ه م هَ زاویه‌سنك قیمتی
لا ایله کوستریلورسه ك ءَ هَ ه سطح پارچه‌سنك فوقنده اولان منطقه قسمنك

مساحه‌سی = لا . ر . ءَ ءَ اولوب ءَ ءَ = ح ءَ اولدیغندن مساحهٔ مذکوره = لا . ر . ح . ءَ بولنور. (لا) نك اصغر نامتناهی حالنده (ء ءَ ءَ ء) ك فوقنده بولنان ءءَءَءَ سطح کره‌سی دخی (لا . ر . ح . ءَ) نه مساوی قبول ایدیله‌بیلور .

ح ء م = ح ء م = قا . ء ح ء = ء م ء = لا اولوب ح ء م ء مستقیملرینك تقاطع نقطه‌سی ط ایله کوستردیکی حالده لا . ح ءَ = ءَ ط = م ءَ — م ط = م ءَ — م ء اولمغله اصغر نامتناهی اکسز اولان سطح ءءَءَءَ = ر (م ءَ — م ء) وعینی وجهله ءءَءَءَ = ر (م ءَ — م ءَ) بولنوب هر ایکیسنك مجموعی ءءَءَءَ = ر (م ءَ — م ء) اولور. بوسببدن محدود اولان ء ح ح = ر (م ح — م ء) بولنور. ءَ نقطه‌سنك م مرکزینه و ح نقطه‌سنك ح نقطه‌سنه انتقالی تقدیرنده ثمن کره سطحنك نصف اسطوانه ایله آیریلمش اولان قسمی = ر (ر — ٠) = $ر^٢$ اولمش اولورکه مفروض ایکی اسطوانه ایله افراز ایدیلان سطحدن غیری اولان سطح کره ایچون (٨ $ر^٢$) اوله‌جغی آزادهٔ قید و اشعاردر .

سطح مستدیر کره { ٤٠ ، (٣٢) } = ٤ π $ر^٢$ اولمغله ٨ $ر^٢$ طرح ایدیلورسه مفروض اسطوانه‌لرك سطح مستدیر کره‌دن افراز ایلدکاری درت سطح پارچه‌سی بولنمش اوله‌جغندن ح ایله ارائه اولندقده :

ح = ٤ π $ر^٢$ — ٨ $ر^٢$ = ٤ $ر^٢$ (π — ٢) اولمش اولور .

§ ٤٤) [غ . م .]

غولدین (Guldin) دعواسی : (١) برسطح دورانینك (یعنی عینی برمستویده بولنوب یکدیکرینه ملاقی ویا غیرملاقی ایکی مستقیمدن بری محور

اعتبار اولنه‌رق دیکرینك دوری واسطه‌سیله تشکل ایدن سطحك) مساحه‌سی مولدك مرکز ثقلتنك ، دور اثناسنده قطع ایلدیکی مسافه ایله طول مولدك حاصل ضربنه مساویدر .

(٢) بر جسم دورانینك (یعنی عینی بر مستویده بولنوب یکدیکرینی قطع ایدن ویا ایتمیان بر مستقیم ایله بر شکل مستویدن: مستقیم، محور اعتبار اولنه‌رق شکل مستوینك دورانندن حاصل اولان جسمك) مساحهٔ حجمیه‌سی مستویٔ مولدك مرکز ثقلتنك، دور اثناسنده قطع ایلدیکی مسافه ایله مساحهٔ مستوینك حاصل ضربنه مساویدر .

اثباتی : فن ماکنه‌ده کوریله‌جکی اوزره :

ا) : متجانس اولان بر مستقیمك مرکز ثقلتی منتصف نقطه‌سنده ،

ب) : « « « مثلثك « « قطرلرینك تقاطع نقطه‌سنده بولندیغندن و

ح) : بر خط (ویاسطح)ك اقسامی م، مَ، مً، . . . . و اشبو اقسامك مرکز ثقلتلرندن محوره اولان مسافاتی ص، صَ، صً، . . . . و تکمیل خط (ویاسطح)ك مرکز ثقلتندن محوره اولان بعدی ث ایله کوستریلورسه :

$$ث = \frac{م\ ص + مَ\ صَ + مً\ صً + \ldots\ldots}{م + مَ + مً + \ldots\ldots\ldots\ldots}$$ اولدیغندن

اولاً: بر م قسم مستقیمنك، نهایت نقطه‌لرندن (ـبر) و (ـر) بعدنده بولنان بر محور اطرافنده دورندن بر مخروط ناقصك سطح مستدیری تولد ایلرکه مساحه‌سی {§٣٢، (٢٣)} $= م\ \pi\ (ـبر + ـر)$ اولوب م قسم مستقیمنك مرکز ثقلتندن محوره قدر اولان مسافه $ص = \frac{1}{2}\ (ـبر + ـر)$ اولمغله مخروط ناقص مذکورك سطح مستدیرینك مس ۱ سی $= م \times ٢\ \pi\ ص$ بولنور.

شکل ٦٠

ایمدی م، مَ، مً ، . . . . . قسم مستقیملرندن مرکب بر خط منکسرك (قسم مستقیملرك اصغر نامتناهی حالنده، بر منحنینك) بر محور اطرافنده دوراندن تولد ایدن سطحك مساحه‌سی ح ایله کوستریلورسه:

ح = م × ۲ π ص + مَ × ۲ π صَ + مً × ۲ π صً + ...

= ۲ π (م ص + مَ صَ + مً صً + ...)

و (ح) ، عطفاً: ح = ۲ π ث (م + مَ + مً + ...) اولوب خط مولدك تکمیل طولی ل ایله ارائه اولندقده:

ح = ۲ π ث ل بولنمش اولور .

ثانیاً : (شکل — ٦٠) ءَ ب۱ ج۱ مثلثك، ب۱ ج۱ ضلعنك استقامت مخرجه‌سنه عمود اولان بر ر رَ محوری اطرافنده دورینی تصور ایده‌لم : ب۱ هـ، ج۱ هـ، ءَ ء مسافه‌لری ص، ج، ب ایله و (هـ ء) قسم مستقیمی ك ایله ارائه اولنورسه مثلثك دوراندن حاصل اولان جسمك حجمی { § ۳۲ ، (۲۲) }

$$= \frac{1}{٣} \pi \text{ ك } (ه^٢ + ه ب + ب^٢) - \frac{1}{٣} \pi \text{ ك } (ح^٢ + ح ب + ب^٢)$$

$$= \frac{1}{٣} \pi \text{ ك } (ه - ح) (ه + ح + ب)$$

اولوب بحء مثلثی △ ایله ارائه اولنورسه ك (ه — ح) = ٢ △ اوله جغندن جسم مفروضك مساحهٔ حجمیه‌سی $= \frac{٢}{٣} \pi \triangle$ (ه+ح+ب) بولنور . ایمدی مثلثك مرکز ثقات نقطه‌سی ط فرض اولنسون. ءَط قسم مستقیمی ح نقطه‌سنده تنصیف ایدیلوب (ط ایله ح) دن (ر رَ) نه ایندیریلان ط طَ، ح حَ عمودلرینه ع،س دیرسه‌ك {ه ٥٠ § ٤٦} ٢ ع = $\frac{1}{٢}$ (ه+ح) + س، ٢ س = ع + ب اولوب برنجی مساوات ایکی ایله ضرب و ٢ س یرینه ایکنجی مساواتدن مساوی‌سی محله وضع و اصلاح اولندقده :

٣ ع = ه + ح + ب بولنمغله بوحالده جسم مفروضك مساحهٔ حجمیه‌سی = △ × ٢πع اولمش اولور .

شمدی کیف ما اتفق بر ذوکثیر الاضلاعك ر رَ محوری اطرافنده‌کی دورینی دوشونه‌لم : رأسلرندن کندی مستویسی داخلنده اولمق اوزره بر طاقم مستقیملر رسم ایده‌لم که استقامت مخرجه‌لری ر رَ محورینی عموداً قطع ایتسونلر . بو واسطه ایله یکدیکرینه موازی اوله‌رق تشکل ایدن شبه منحرفلرك برر قطرلرینی وصل ایلیه‌لم . ذو کثیر الاضلاع معلوم ، برر ضلعلری ر رَ محورینه عموداً واقع اولان مثلثلره [△،△َ،...] انقسام ایدر. ذو کثیر الاضلاعك دوروندن تولد ایدن جسمك مساحهٔ حجمیه‌سی ك فرض اولنورسه :

$$ک = \Delta \times ٢\pi ع + \acute{\Delta} \times ٢\pi \acute{ع} + \cdots\cdots$$

$$= ٢\pi (\Delta ع + \acute{\Delta}\acute{ع} + \cdots\cdots\cdots)$$

اولوب ث ذوکثیرالاضلاعك مرکز ثقلتندن محوره قدراولان مسافه‌یه دلالت ایدرسه (ح) ، عطفاً :

$$ک = ٢\pi ث (\Delta + \acute{\Delta} + \cdots\cdots)$$

و ذوکثیرالاضلاعك مساحهٔ سطحیه‌سی ے ایله ارائه اولنورسه :

$$ک = ے \times ٢\pi ث$$ بولنور .

تنبیه : اشبو دستور، سطح دوارك برخط منکسرایله محاط اوله‌جق یرده نا متناهی پارچه‌لری مستقیم فرض اولنه‌بیلان بر منحنی ایله احاطه اولندیغی حالده دخی جاریدر .

مثال : ر نصف قطرنده ومرکزندن ح بعدنده بولنان برمحور اطرافنده دور ایدن بر دائره‌نك سمیت شکلنده تولید ایلدیکی جسمك مساحهٔ حجمیه‌سی

$$= ٢\pi^{٢} ر^{٢} ح$$

وسطح خارجیسی

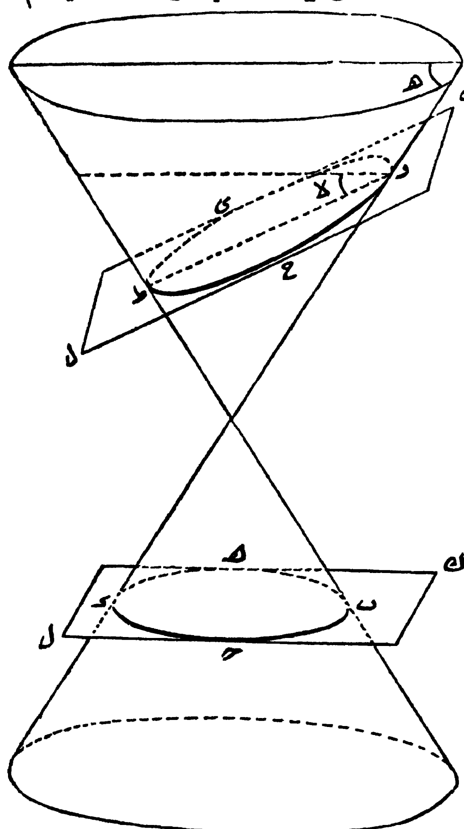
$$= ٤\pi^{٢} ر ح$$ اولور .

بشنجی فصل

قطوع مخروطیات وحلزونه

(§ ٤٥)

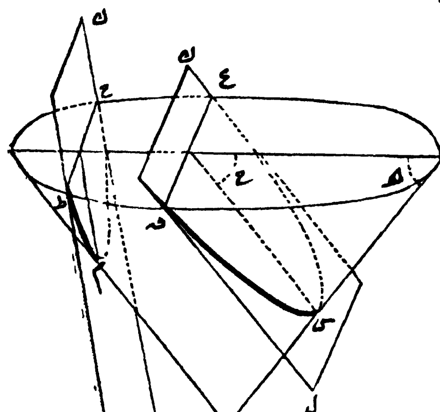
بر مخروط دورانی ایله بونك رأساً مقابلی [متناظرینی] تصور ایده‌لم :

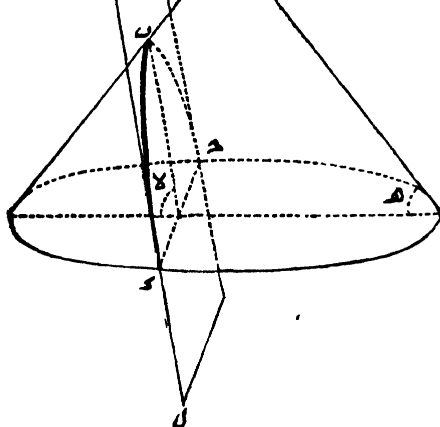


(شکل — ٦١)

(شکل — ٦١) محورینه عمود وتعبیر دیکرله قاعدهٔ مخروطه موازی اوله‌رق مخروطی قطع ایتمك اوزره رسم ایدیلن بر (ك ل) مستویسنك سطح مستدیر مخروط ایله فصل مشترکی [ب ح د ه مقطعی] بر محیط دائره اولدیغی آشکاردر. مستویٔ مذکور قاعدهٔ مخروطه موازی اولمیوب ده مائل بر وضعیتده اولسه میل زاویه‌سنك مقدارینه کوره سطح مستدیر مخروط اوزرنده اوچ مختلف منحنی تولد ایدر . شویله‌که اکر مستوینك قاعدهٔ مخروط ایله تشکیل ایلدیکی مستوین زاویه‌سنك مقیاس زاویه‌سی مولد مخروطك قاعدهٔ مذکوره‌یه نظراً اولان میل زاویه‌سندن

(شكل — ٦١) كچوك [لاْ < مْ] اولورسه «قطع ناقص» نامى تحتنده و ح ط ى مثللو قپالى واكر (شكل — ٦٢) بيوك [لاْ > مْ] اولورسه مستوى هر ايكى مخروطى قطع ايتديكندن هر برى آچيق اولمق اوزره





(شكل — ٦٢)

ح ب ى، ح م ط مثللو «قطع زائد» نامیله ایکی قوللی واکرچه مساوی [مْ = حْ] اولورسه كذلك آچيق و«قطع مكافى» دنيلن ه س ع مثللو يالكز بر قوللى منحنيلر وجوده كلير كه خواص مخصوصه‌سنه كوره هر برى بروجه آتى تعريف و بيان اولنور.

قطع ناقص

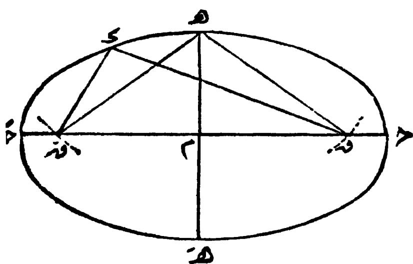
§ ٤٦)

تعريفات

(١) هر نقطه‌سنك، داخلنده واقع ايكى نقطهٔ ثابته‌يه اولان بعدلرى مجموعى بر مقدار ثابتدن عبارت اولان منحنى‌يه «قطع ناقص» تسميه اولنور.

(۲) : (شکل ـ ٦٣) مذکور ایکی نقطهٔ ثابتـه‌یه [وه ، وَه] « نقطهٔ احتراق » ؛ بعد ثابتـه [ح حَ] « محور کبیر » ومحور کبیرك م منتصف نقطه‌سـندن کچن هـ هَ قسم مسـتقیمنه «محور صغیر» ؛ م نقطه‌سـنه «قطع ناقصك مرکزی» ؛ وه وَه قسم مستقیمنه «نقطهٔ احتراقلر بعدی» ؛ ح ، حَ ، هـ ، هَ نقطه‌لرینه «قطع ناقصك رأسلری» دنیلور.

(۳) : منحنی اوزرنده واقع هر قنغی بر نقطه‌نك نقطهٔ احتراقلره اولان (دوه ، دوَه) بعدلری نقطهٔ مذکوره‌نك «شعاعلری» نامنی آلیرلر.



(شکل — ٦٣)

تنبیه : شکلك مطالعه‌سندن و قطع ناقصك تعریفندن هـ ، هَ رأسلرینك شعاعلری یکدیکرینه و بناءً علیه هر بری محور کبیرك نصفنه و (ح ، حَ) رأسلرینك شعاعلری بیننده‌کی فضلك دخی نقطهٔ احتراقلر بعدینه مساوی اولدیغی اکلاشیلور.

مسئله : هـ هَ محور صغیری ایله ح حَ محور کبیری معلوم اولان بر قطع ناقصك نقطهٔ احتراقلرینی بولمق مطلوبدر.

صورت حلی : اولاً یکدیکرینـه عمود اولمق اوزره هـ هَ ایله ح حَ مستقیملری رسم ؛ ثانیاً م هـ $= \frac{1}{2}$ هـ هَ ؛ م ح $= \frac{1}{2}$ ح حَ قطع اولنور. ثالثاً هـ نقطه‌سی مرکز اوله‌رق (م ح) ، مسـاوی اولان هـ وه نصف قطریله چیزیلان قوسك ح حَ محور کبیرینی قطع ایلدیکی وه ، وَه نقطه‌لری بولنور.

تنبیه سابقه عطفاً اشبو ایکی نقطه‌نك مطلوب اولان نقطهٔ احتراقلردن عبارت اولدیغی محتاج ایضاح دکلدر .

(٤٧ §)

قطع ناقصك ترسیمی

(۱) : قطع ناقصك تعریفنه نظراً (شکل—٦٣) وه، وهَ نقطهٔ احتراقلریله قطع ناقصك محیطی اوزرنده بولنان هرقنغی بر د نقطه‌سی بیننده‌کی بعدلر مجموعی [دوه+دوهَ] دائما ثابت اولان ححَ محورکبیرینه مساوی اولدیغندن وه، وهَ نقطهٔ احتراقلرینه ایکی طوپلو ایکنه دیکه‌رك بو ایکنه‌لره محور کبیرك طولنه مساوی برایپلکك اوجلری باغلانور وبعده کوشك برحالده طوران اشبو ایپلکه بر قورشون قلم و یا اینجه برچیوی طاقیله‌رق کریلور و قلم و یا چیوی ایپلکه دائما مماس قالمق و اوجی خفیفجه کاغدده طوقونمق اوزره ایکنه‌لر اطرافنده دور ایتدیریله‌رك برمنحنی چیزیلورسه مطلوب اولان قطع ناقص وجوده کلمش اولور .

تنبیه : ارض اوزرنده قطع ناقص رسم ایتمك ایچون ایکنه یرینه قازیق و ایپلیك یرینه ایپ و قورشون قلم یرینه ده بیوك برچیوی قوللانیلور.

(۲): محور صغیری ایله محورکبیری معلوم اولان برقطع ناقصی نقطه بنقطه ترسیم ایتمك ایچون { مسئله (۱) } ه استناداً تعیین اولنان وه، وهَ نقطهٔ احتراقلری مرکز اولمق اوزره مجموعلری محورکبیرك طولنه مساوی اولان مختلف نصف قطرلرله متعدد قوسلر رسم ایدیلور وقوسلرك تلاقی نقطه‌لری بینلری وصل اولنور.

تنبیه : قطع ناقصك شکلی محورلرینه تابع اولوب ایکی محور بیننده‌کی فضل نقدر بیوك اولورسه قطع ناقصك شکلی دخی اونسبتده طولانی اولور.

فضل نقدر كچوك اولورسه شكل مذكور، دائره‌يه ياقلاشور واشبو فضلك صفره منجر اولمسى حالنده قطع ناقص دائره‌يه منقلب اولور. [*]

قطع زائد

§ ٤٨)

اشبو منحنى نادراً استعمال اولنديغى كبى مفصلاً مباحث رياضيهٔ عاليه‌ده كوريله‌جكندن بوراده ذكرندن صرف نظر اولنمشدر.

قطع مكافى

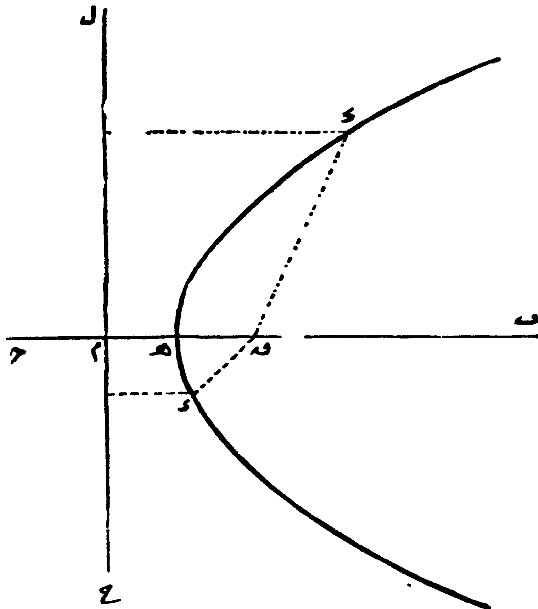
§ ٤٩)

تعريفات

(شكل — ٦٤) اوزرنده واقع هر بر (ى) نقطه‌سى بر (ه) نقطهٔ ثابته‌سى ايله بر (م ل) مستقيم ثابتندن ابعاد متساويه‌ده بولنان منحنى‌يه «قطع مكافى»؛ مذكور نقطهٔ ثابته‌يه «نقطهٔ احتراق»؛ مستقيم ثابته «محور مربى»؛ ه نقطه‌سنه «قطع مكافينك رأسى» و (ه) نقطه‌سندن كچوب محور مربى‌يه عمود اولان ه ه م مستقيمنه «قطع مكافينك محورى» دنيلور.

---

[*] ح نصف محور صغيرك طولى، ب نصف محور كبيرك طولى اولديغنه نظراً قطع ناقصك مساحهٔ سطحيه‌سى $=\pi$ ب ح اولديغى مباحث رياضيهٔ عاليه‌ده كوريله‌جكدر.



شكل ٦٤

(§ ٥٠)

قطع مكافينك ترسيمى

(١) : جدول و كونيه واسطه‌سيله قطع مكافى‌يى رسم ايتمك ايچون (شكل — ٦٥) اولاً — م ء محور مربيسنه ءَ ج جدول تحته‌سى وبوكا عموداً ل هـ ء كونيه‌سى تطبيق اولنور. ثانياً — كونيه‌نك ل هـ ضلع قائمنه مساوى بر طولده النان بر ايپلكك بر اوجى ف نقطهٔ احتراقنه ديكيلن بر طوپلوايكنه‌يه وديكر اوجى كونيه‌نك ل رأسنه ربط اولنور. ثالثاً — ايپلك برقورشون قلمى

اوجیله کریلمك و اشبو اوج دائما کونیه‌نك ل ھ کنارینه تماس ایلمك اوزره کونیه یوقاری‌یه طوغری تحریك ایدیلور . ایشته قلم اوجنك رسم ایلدیکی منحنی مطلوب اولان منحنینك نصفندن عبارت اولوب عینی عملیات اشاغی‌یه طوغری اجرا ایدیلورسه منحنینك نصف دیکری دخی تشکیل ایدلمش اولور .

شکل ٦٥

(٢): قطع مکافینك نقطه‌بنقطه ترسیمی ایچون (شکل — ٦٦) اولاً — یکدیکرینه عمود م ب ، م ط مستقیملری رسم اولنوب م ب محور و (م ط) محور مرئی اعتبار اولنور. ثانیاً — وه نقطهٔ احتراقندن محور مرئی‌یی قطع ایتمك اوزره متعدد وه ی ، وه ھ ، وه ح . . . الخ مستقیملری چیزیلور. ثالثاً — اشبو مستقیملرك عمود ناصفلریله ی ، ھ ، ح . . . الخ . نقطه‌لرندن محوره موازاتاً رسم ایدیلن مستقیملرك ل ، ص ، س . . . الخ تلاقی نقطه‌لری تعیین اولنور. ایشته بو وجهله بولنان نقطه‌لر متساسلاً یکدیکرینه وصل و ربط اولنورسه قطع مکافی منحنیسی تولد ایدر .

تنبیه : ك ، ل ، ص ، س . . . نقطه‌لری وه نقطه‌سندن کچه‌رك محور مرئی‌یه مماس اولان محیط دائره‌لرك مرکزلرندن عبارت اولدیغی بدیهی اولدیغندن قطع مکافی منحنیسی بر نقطهٔ ثابته‌دن کچن و دائما بر مستقیم ثابته مماس

شكل ٦٦

اولان محیط دائره‌لرك مرکزلرینك محل هندسیسی دخی دیمك اوله‌جغی اكلاشیلمش اولور . [*]

حلزون

§ (٥١)

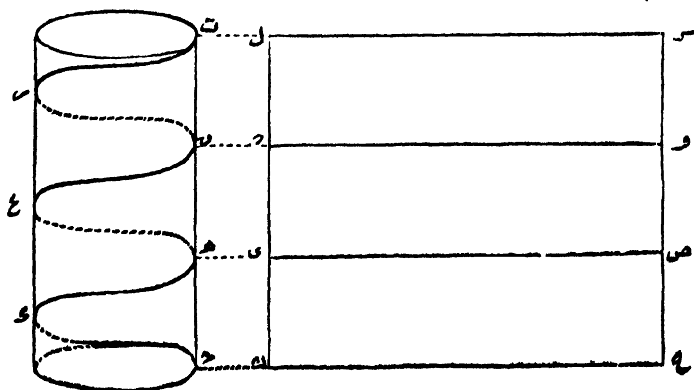
تعریفات

(شكل — ٦٧) هرقنغی براسطوانهٔ دورایه ، برمولدی استقامتنده

[*] محور مربی‌یه موازی اولان مستقیم ایله قطع مكافی منحنیسی آره‌سنده بولنان سطحك مساحه‌سی منحنی مذكور اوزرنده مرسوم مستطیلك مساحه‌سنك ایكی ثلثنه مساوی اولدیغی مباحث ریاضیهٔ عالیه‌ده كوریله‌جكدر .

بعدالانکشاف {§ ۳۱)، تنبیه} س ل ح ك شکل مستطیلی اخذایده‌جکندن ل ك مولدی اقسام متساویه‌یه تقسیم اولنوب‌ده تقسیمات نقطه‌لرندن ل س مستقیمنه موازی ﻫ و ، ی ص مستقیملری رسم و (س ﻫ، و ی، ص ك) قطرلری وصل اولنور ومستطیل مذکور تکرار اسطوانه‌یی تشکیل ایتمك اوزره صاریلورسه قطرلر اسطوانه‌نك سطح مستدیری اوزرنده ت ر ﻫ ع ﻫ د ح منحنی غیر منقطعنی تشکیل ایدرلر . ایشته بو وجهله تشکیل ایدن منحنی‌یه « حلزون » تسمیه اولنور .

برنجی (ﻫ س) قطرینك تشکیل ایتدیکی حلزونك برنجی قسمنه [ت ر ﻫ] «دورهٔ حلزون» دینلور. ایکنجی (و ی) قطری برنجی دوره‌یه مربوط ﻫ ع ﻫ دورهٔ حلزونی و اوچنجی (ص ك) قطری ایکنجی دوره‌یه متصل اولان ﻫ د ح . . . الخ. دورهٔ حلزونی تشکیل ایدر . ایکی دورهٔ حلزون بیننده بولنان اسطوانه پارچه‌سی غیر متحول اولوب ایکی حلزون آره‌سنده بولنان مولد قسمنه «خطوهٔ حلزون» تعبیر اولنور . بو صورتده ت ق قسم مستقیمی برخطوهٔ حلزونی ارائه ایدر .



شکل ٦٧

تویبقات صمدانیه ایله بتدی

هندسهٔ مجسمه مندرجاتنك درسلره صورت تقسیمنی
مشعر جدولدر

درس	§
١	§ ١)
٢	§ ٢ و ٣)
٣	§ ٤) : § ٧، ا)
٤	§ ٨) : ١٠)
٥	§ ١١)دن (١) : (٩)
٦	§ ١١)دن (١٠) : (١٥)
٧	§ ١٢)
٨، ٩، ١٠	§ ١٢، ا)
١١	§ ١٣ و ١٤)
١٢	§ ١٥ و ١٦)
١٣	§ ١٧)
١٤، ١٥	§ ١٧، ا)
١٦	§ ١٨)دن (١) : (٤)
١٧	§ ١٨)دن (٥) : (١١)
١٨، ١٩، ٢٠	§ ٢٠، ا)
٢١	§ ٢١ و ٢١، ا)دن (١) و (٢)
٢٢	§ ٢١، ا)دن (٣) و (٤)
٢٣	§ ٢٢ و ٢٣ و ٢٣، ا)
٢٤	§ ٢٣، ب)
٢٥، ٢٦	§ ٢٣، ج)
٢٧، ٢٨، ٢٩	§ ٢٣، د)
٣٠	§ ٢٤)
٣١	§ ٢٥ و ٢٥، ا)
٣٢	§ ٢٥، ب)
٣٣، ٣٤، ٣٥	§ ٢٥، ج)
٣٦	§ ٢٦ و ٢٧)
٣٧	§ ٢٨ و ٢٨، ا و ٢٩)
٣٨	§ ٣٠، ا)
٣٩، ٤٠، ٤١	§ ٣٠، ب)
٤٢	§ ٣١)
٤٣، ٤٤، ٤٥	§ ٣١، ا)

تنبيه : § ١٩) و§ ٢٠) و §٣٠) ايله § ٤١) غير مجبوريدر .

١٣١٧ تشرين ثاني

خطا وصواب جدولى

صحيفه	سطر		خطا	صواب
١٠	٩	(آشاغيدن)	تَ ء = ب ءَ	تَ ء = ب ء
١١	٨	(يوقاريدن)	تعربف	تعريف
١٢	٦	«	مستقم	مستقيم
١٣	٦	(آشاغيدن)	م. مَ	م ، مَ
١٧	٤	(يوقاريدن)	ب تَ ‖ و = ءَ ءَ	ب تَ ‖ و = ء ءَ
٣٦	٣	(آشاغيدن)	ى $ب^{٨}$ ح ،	ى $ث^{٨}$ هـ ، .....
٤٢	٧	«	ے ےَ	ے ، ےَ
٤٢	٩	«	بالطبيق	بالتطبيق
٤٥	٣	(يوقاريدن)	متوازى المسطيلاتلر	متوازى المستطيلاتلر
٤٦	٣	(آشاغيدن)	§ ١٠١٣)	§ ١٠٢٣)
٤٩	٢	(يوقاريدن)	$ءهَ_{٢} = ءهَ_{٢}$	$ءهَ_{٢} = ءهَ$
٤٩	٣	«	$حَ_{١}$ ؛ $ب هَ_{١١}$ =	$حَ_{١}$ ؛ وبنه (شكل-٣١) ب هَ =
٤٩	٤	«	$بَ هَ_{٢٢} = ب هَ$	$بَ هَ_{٢٢} = ب هـ$
٤٩	٥	«	ب تَ = ح حَ	ب تَ = ح حَ
٥٠	٥	«	وه/وَه — ك/كَ	وه/وَه = ك/كَ
٥١		(٣٤) نجى شكلده	(وه وَه) اهرام ناقصى .... ے ؛ (ك كَ) « « ... ےَ	ايله گوستريله جكدر
٥٢	٦	(يوقاريدن)	قاعده‌سى ع = ١٠سم	ارتفاعى ع = ١٠سم
٥٣	٥	«	$٥٢،٥ م^{٢}$	$٥٢،٥ م^{٣}$
٥٤	٥	«	$٢ دم^{٢}$	$٢ دم^{٣}$

صحیفه	سطر		خطا	صواب
٥٦	١	(یوقاریدن)	قطر صغیری	قطر قائمی
٥٧	١	(آشاغیدن)	تَحَ / تح =	تَحَ / تَحَ = مَحَ / مح
٥٨	١	(یوقاریدن)	= مَحَ / مح	= مَحَ / مَح
٥٩	(٣٧)نجی شکلده قاعده‌نك اوچنجی رأسی(ح) حرفیله کوستریله‌جکدر.			
٦٠	٥	(یوقاریدن)	مستویلرله	مستویلریله
٦٠	٢	(آشاغیدن)	ع٠ے / ع٠ےَ =	ع٠ے / ع٠ےَ
٦٩	١	(یوقاریدن)	ب٢ / ے = بَ٢ / ےَ	ب٢ / ے = بَ٢ / ےَ
٧١	٢	»	تحتانیسی ب	تحتانیسی بَ
٧٤	٣	»	١/٢ ء ع٢ + ١/٢ هـ ع٣	١/٤ ء ع٢ + ١/٨ هـ ع٣
٧٥	٤	(آشاغیدن)	١/٦ ع(ےَ+ےَ	١/٦ ع(ے+ےَ
٧٦	٢	»	٤/٩ ع٢	٤/٩ ء ع٢
٧٦	٣	»	٢ ح ح	٢ ح ع
٧٧	٣	(یوقاریدن)	قاعدتیك	قاعدتیننك
٧٧	٨	»	بولنان بر اهرامك	بولنان براهرام ناقصك
٧٨	(شکل ٤٤)ده قاعده‌نك دردنجی رأسی ط ایله کوستریله‌جکدر .			
٧٨	٥	(آشاغیدن)	ط ع	ط س
٨٢	٢	(یوقاریدن)	ایکی قاعده‌لردن	ایکی قاعده‌لرندن
٨٦	١	(آشاغیدن)	١/٢ ع ٠ ے	١/٣ ع ٠ ے
٨٩	٢	»	مخروط	مخروطك
٩١	٧	(یوقاریدن)	٠٨٠ م	٠٫٨٠ م

صحیفه	سطر		خطا	صواب
٩١	١٠	(یوقاریدن)	۳۲۳۷ م^{2}	۳۲,۳۷ م^{2}
٩٧	١٠	«	سطع	سطح
٩٨	٩	(آشاغیدن)	ب_{1}	هـ_{1}
١٠٤	٤	(یوقاریدن)	$\frac{1}{6}\pi\,\text{ع}\,(\text{هم}+\text{ه©م})^{2}$	$\frac{1}{3}\pi\,\text{ع}\,(\text{هم}+\text{هم})^{2}$
١٠٧	١	(آشاغیدن)	$\text{حَ}=\frac{\text{ك}^{2}}{\pi 2}$	$\text{حَ}=\frac{\text{ك}^{2}}{\pi}$
	٤	«	$\frac{(2\pi\,\text{ر})^{2}}{\pi 2}$	$\frac{(2\pi\,\text{ر})^{2}}{\pi}$
	٥	«	$\text{حَ}=2\,\pi\,\text{ر}^{2}$	$\text{حَ}=4\,\pi\,\text{ر}^{2}$
١٠٨	٣	«	کوستریلورسه :	کوستریلورسه : $\frac{\text{حَ}}{\text{ح}}=\frac{\text{لَ}^{2}}{\text{قا}^{2}}$ [*] $\therefore\ \text{حَ}=\frac{\text{لَ}^{2}}{\text{قا}^{2}}\cdot\text{ح}$ (۳۳) اولور.
١١١	٩	«	۲,۵۰ م^{2} متره	۲,۵۰ م^{2}
١١٢	٢	«	استیعابیه‌سی	استیعابیسی

١٢٧ شکلده جدول تخته‌سنك شکل ٦٥ یازیسنه یقین اولان (د) اوجی (دَ) اوله‌جقدر.